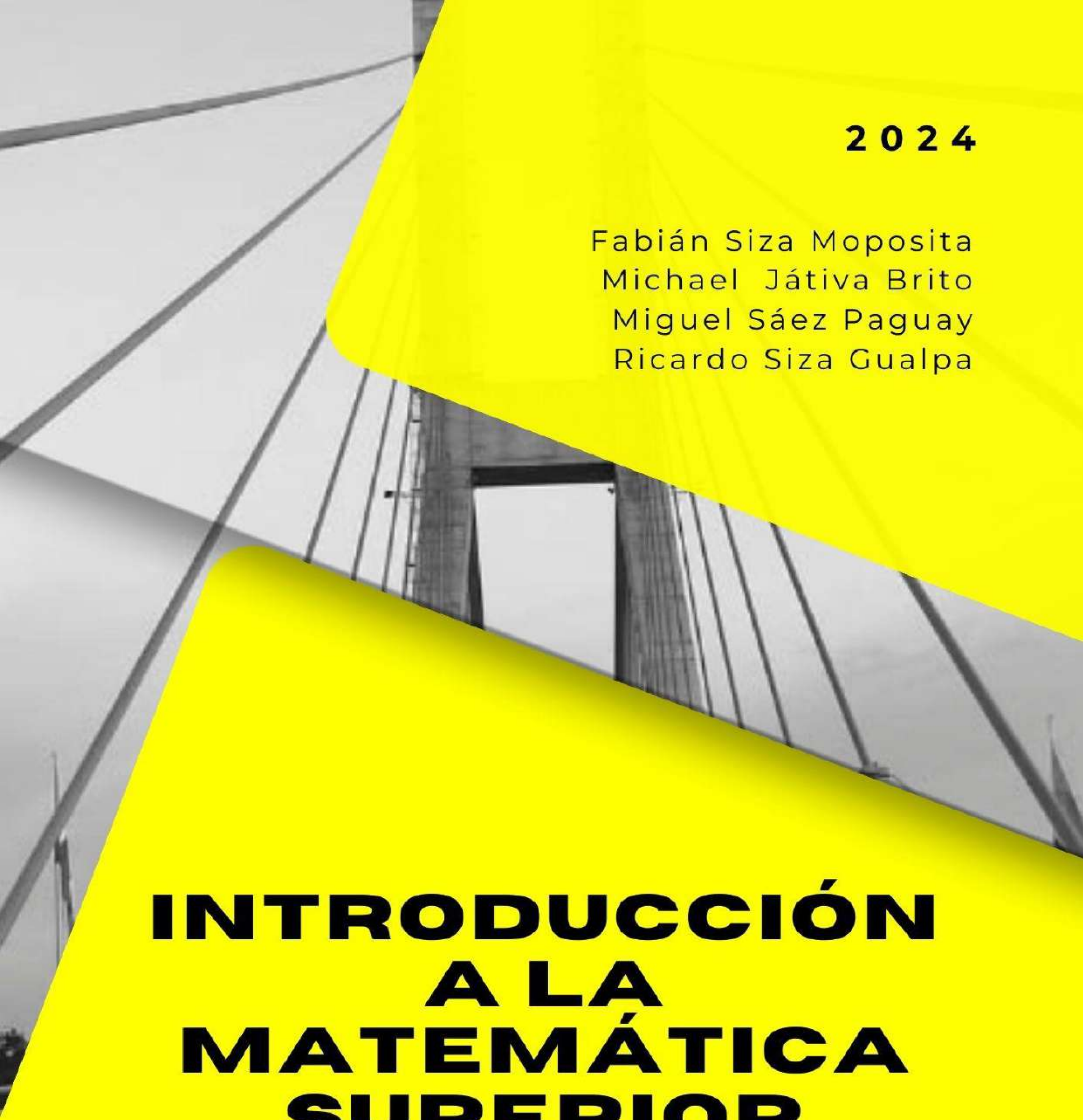


2024

Fabián Siza Moposita
Michael Játiva Brito
Miguel Sáez Paguay
Ricardo Siza Gualpa

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA SUPERIOR

TEORÍAS, APLICACIONES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

SELLO EDITORIAL

Publicado en: https://inblueeditorial.com
https://inblue-editorial.gitbook.io/inblue-editorial-servicios-editoriales/libros-publicados
Teléfonos: 062015939 / 0986391700
Mail: inblueedit@gmail.com
Esmeraldas - Ecuador

TÍTULO DEL LIBRO

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA SUPERIOR
TEORÍA, APLICACIONES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

LIBRO DIGITAL

Primera Edición, enero/2024

EDITORES

PhD. Ermel Viacheslav Tapia Sosa
PhD. Nayade Caridad Reyes Palau

REVISIÓN DE REDACCIÓN Y ESTILO

PhD. Alexander Gorina Sánchez

REVISIÓN DE PARES

PhD. Carlos Manuel Hernández Hechavarría
PhD. Elsa Iris Montenegro Moracén

DISEÑO Y MAQUETACIÓN
Lenin Wladimir Tapia Ortiz

Ilustraciones y fotografías

Archivo del autor y sitios web debidamente referidos

ISBN: 978-9942-45-274-0

DOI: 10.56168/ibl.ed.167920

AUTORES

© Segundo Fabián Siza Moposita

fabian.siza@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0001-8036-6974

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Facultad de Ciencias Pecuarias, Orellana, Ecuador

© Michael Estefanía Játiva Brito

estefania.jativa@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-6394-2586

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Facultad de Informática y Electrónica, Orellana, Ecuador

© Miguel Ángel Sáez Paguay

miguel.saez@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-3192-5084

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Facultad de Recursos Naturales, Orellana, Ecuador

© Ricardo Fabián Siza Gualpa

ricardo.siza@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-3775-4397

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Instituto de Postgrado y Educación Continua (IPEC), Orellana, Ecuador

Como citar al libro: Siza Moposita, S., Játiva Brito, M., Sáez Paguay, M., Nazareno y Siza Gualpa, R. (2023). *Introducción a la matemática superior: Teoría, aplicaciones y recursos didácticos.* Primera Edición. inBlue Editorial. ISBN: 978-9942-45-274-0 Doi: 10.56168/ibl.ed.167920

http://dx.doi.org/ 10.56168/ibl.ed.167920

PREFACIO

"Introducción a la Matemática Superior: Teoría, Aplicaciones y Recursos Didácticos" surge como una guía fundamental para adentrarse en el fascinante mundo de las matemáticas avanzadas. Este libro representa un recurso integral que combina la rigurosidad teórica con la relevancia práctica de esta disciplina, ofreciendo un enfoque único que abarca tanto los fundamentos teóricos como las aplicaciones contemporáneas en diversos campos.

Concebido como un recurso educativo completo, esta obra se propone no solo transmitir conocimientos abstractos, sino también brindar herramientas didácticas innovadoras para facilitar la comprensión y el aprendizaje. Desde la teoría de conjuntos hasta análisis funcional, desde la geometría algebraica hasta la teoría de números, este libro abarca un amplio espectro de áreas matemáticas, presentándolas de manera accesible y práctica para estudiantes, educadores y entusiastas de las matemáticas.

A lo largo de estas páginas, los lectores encontrarán ejemplos claros, ejercicios desafiantes y aplicaciones concretas que ilustran la importancia y el alcance de la matemática superior en el mundo actual. Se incorporan, además, recursos didácticos innovadores, como esquemas visuales, demostraciones paso a paso y conexiones interdisciplinarias, con el objetivo de fomentar un aprendizaje dinámico y significativo.

Este libro no solo busca proporcionar conocimientos profundos sobre teorías matemáticas avanzadas, sino también inspirar un sentido de aprecio y admiración por la belleza y la utilidad de las matemáticas en la resolución de problemas complejos en la ciencia, la ingeniería, la economía y otras áreas del saber humano.

Esperamos que esta obra sirva como un valioso compañero en el viaje hacia el entendimiento de la matemática superior, desafiando y estimulando a los lectores a explorar sus fascinantes aplicaciones y a descubrir la elegancia inherente en el lenguaje universal de las matemáticas.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática es una disciplina que ha demostrado su valor incalculable en la sociedad moderna. Su presencia se encuentra en todas las esferas de la vida, desde los sistemas de navegación por satélite que usamos para viajar, hasta los algoritmos de aprendizaje automático que alimentan nuestras aplicaciones de smartphone. Sin embargo, a pesar de su importancia en nuestra vida cotidiana, existe una brecha significativa en la comprensión matemática en todos los niveles de educación. La presente obra, "Introducción a la Matemática Superior: Teoría, Aplicaciones y Recursos Didácticos", busca abordar esta brecha al proporcionar una introducción accesible y comprensiva a los conceptos matemáticos más avanzados para estudiantes y profesores universitarios, con un enfoque especial en la comunidad de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Ecuador.

Este libro está organizado en cuatro capítulos clave que cubren los componentes esenciales de las matemáticas superiores: Funciones Reales, Límites y Continuidad, Cálculo Diferencial e Integral. Cada capítulo se inicia con una introducción al tema seguido de definiciones, teorías y aplicaciones de los conceptos. Los conceptos se explican de manera clara y concisa, con ejemplos y ejercicios para ayudar a los lectores a consolidar su comprensión.

En el primer capítulo, los lectores explorarán el fascinante mundo de las funciones reales. Aquí, se introducirán a las definiciones y las propiedades de las funciones, así como a cómo estas se pueden representar gráficamente. Además, se discutirán conceptos importantes como la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad, además de las operaciones con funciones y las características de las funciones elementales.

El segundo capítulo se adentra en el estudio de los límites y la continuidad, componentes fundamentales en el estudio de las matemáticas superiores. Los lectores aprenderán a calcular y entender la naturaleza de los límites, su significado y sus implicaciones. Además, se explorarán conceptos profundamente vinculados a la continuidad y las propiedades de las funciones continuas.

El tercer capítulo se dedica al Cálculo Diferencial, una rama de las matemáticas que es esencial para una variedad de disciplinas, desde la física hasta la economía. Los lectores aprenderán a calcular derivadas, entender su interpretación geométrica y su importancia en el estudio de las funciones. También se discutirán aplicaciones prácticas de las derivadas, como la regla de L'Hôpital y la identificación de máximos y mínimos de funciones.

En el cuarto capítulo de Cálculo Integral, se aborda la otra cara de la moneda del cálculo, esencial para resolver problemas de áreas, volúmenes y muchos otros en la ciencia y la ingeniería. Se introducirán conceptos como la integral indefinida y definida, y se explorarán métodos de integración y sus aplicaciones.

El quinto capítulo se dedica a la enseñanza aprendizaje de la matemática superior dese la educación 4.0, se analizan las actuales tendencias tecnológicas y didácticas. A pesar de ello, es importante resaltar que este libro también contiene una sección de "Recursos Tecnológicos" y "Recursos Didácticos" en cada capítulo. Estas secciones están diseñadas para proporcionar a los lectores herramientas adicionales para comprender y aplicar los conceptos discutidos. Estos recursos son de gran ayuda para los profesores que buscan nuevas formas de enseñar estos temas complejos de una manera más interactiva y atractiva.

En resumen, este libro es una valiosa herramienta de aprendizaje para cualquier persona que desee explorar el mundo de las matemáticas superiores. Está diseñado para ser accesible para los principiantes, pero también suficientemente detallado para aquellos que buscan profundizar en estos temas. Se espera que este libro inspire a los estudiantes y profesores a ver la belleza y la utilidad de las matemáticas, allanando el camino para futuros avances en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas.

CAPÍTULO I. FUNCIONES REALES

1.0 Introducción al capítulo

El estudio de las funciones es fundamental en las matemáticas superiores y es la base para entender muchos conceptos importantes en áreas como la física, la ingeniería y la economía. En este primer capítulo, se explorarán las funciones de una variable real y se presentarán las características de las funciones elementales más comunes.

Se definirá el concepto de función real y se explicará cómo se representan en términos de su dominio e imagen. Además, se abordará la representación gráfica de una función y se discutirán las diferentes formas en que las funciones pueden ser representadas visualmente. Para facilitar el aprendizaje y la enseñanza, se incluirán recursos tecnológicos y didácticos en esta sección.

Además, se presentarán las operaciones más comunes que se realizan con funciones, como la inyectividad, sobreyectividad, biyectividad y la función inversa. También se discutirá la monotonía de las funciones y cómo se pueden utilizar para entender mejor el comportamiento de una función. Los recursos tecnológicos y didácticos en esta sección ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estas operaciones y a aplicarlas en la resolución de problemas.

En adición, se estudiarán las características de las funciones elementales más comunes. Se presentará la función lineal y su relación con la pendiente de una recta, la función cuadrática y su forma de parábola, la función valor absoluto y su interpretación geométrica, así como las funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas. También se presentarán algunas transformaciones y combinaciones entre funciones elementales en funciones elementales.

Con el fin de que los estudiantes sistematicen el contenido tratado, se proponen ejercicios resueltos y propuestos. Además, se presentan recursos tecnológicos y didácticos que permitirán a los estudiantes ver estas funciones de manera gráfica y comprender mejor sus propiedades.

En resumen, este primer capítulo proporcionará una introducción completa al mundo de las funciones reales y sentará las bases para el estudio de temas más avanzados en la matemática superior. Los recursos tecnológicos y didácticos incluidos en este capítulo ayudarán a los estudiantes a comprender mejor las funciones y a aplicarlas en la resolución de problemas.

1.1 Contribución a la formación de Competencias

A partir del contenido de funciones reales del Capítulo I se puede contribuir a formar las siguientes competencias genéricas, matemáticas y digitales en los estudiantes.

Competencias Genéricas:

- **Pensamiento crítico y analítico**: Los estudiantes podrán analizar y comprender conceptos matemáticos, identificar relaciones entre variables y realizar razonamientos lógicos.
- **Resolución de problemas**: Podrán aplicar los conceptos y técnicas matemáticas aprendidas para resolver problemas relacionados con funciones reales.
- **Habilidades de comunicación**: Podrán expresar sus ideas matemáticas de manera clara y precisa, tanto de forma oral como escrita.
- **Trabajo en equipo**: Podrán colaborar con otros estudiantes en la resolución de problemas y actividades relacionadas con las funciones reales.
- **Autonomía y autorregulación**: Podrán gestionar su propio aprendizaje, establecer metas y planificar su estudio de manera efectiva.

Competencias Matemáticas:

- **Comprensión de funciones**: Los estudiantes desarrollarán la capacidad de comprender y representar funciones de una variable real, tanto algebraicamente como gráficamente.
- **Manipulación de expresiones matemáticas**: Aprenderán a realizar operaciones con funciones, como determinar la inversa de una función o analizar la monotonía de una función.

- **Interpretación y análisis de gráficas**: Podrán interpretar la información proporcionada por las gráficas de funciones y extraer conclusiones sobre su comportamiento.
- **Conocimiento de funciones elementales**: Aprenderán acerca de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y el valor absoluto, y comprenderán sus propiedades y características.
- **Aplicación de funciones en contextos reales**: Serán capaces de aplicar las funciones en la resolución de problemas prácticos en áreas como la física, la ingeniería y la economía.

Competencias Digitales:

- **Uso de recursos tecnológicos**: Los estudiantes podrán utilizar herramientas tecnológicas, como software de cálculo simbólico o gráficas, para explorar y visualizar funciones, realizar cálculos y resolver problemas.
- **Búsqueda y gestión de información**: Serán capaces de buscar información relevante sobre funciones reales en fuentes digitales confiables y organizarla de manera efectiva.
- **Comunicación digital**: Podrán utilizar herramientas digitales para presentar y compartir resultados matemáticos, como gráficas o cálculos, de manera clara y comprensible.
- **Pensamiento computacional**: Aprenderán a abordar problemas matemáticos de manera algorítmica, utilizando la lógica computacional para diseñar estrategias de resolución.
- **Alfabetización digital**: Desarrollarán habilidades básicas relacionadas con el uso de software matemático y la comprensión de interfaces gráficas.

Estas competencias genéricas, matemáticas y digitales son relevantes para que los estudiantes adquieran un conocimiento sólido sobre las funciones reales y puedan aplicarlo de manera efectiva en diversos contextos académicos y profesionales.

1.2 Funciones de una variable real

El propósito fundamental del cálculo son las funciones, las que pueden ser representadas mediante una ecuación, una gráfica, una tabla o con palabras. En este capítulo utilizaremos fundamentalmente las dos primeras formas de representación.

Una función de variable real es una relación matemática que asigna a cada número real en su dominio, un único número real en su imagen. En otras palabras, una función de variable real es una regla que toma un número real como entrada y produce un número real como salida.

1.2.1 *Definición de función real*

Las funciones surgen cuando existen ciertas cantidades que dependen de otras. Se pueden considerar las siguientes situaciones:

a) La longitud L de una circunferencia depende de su radio r. La relación entre r y L se expresa mediante la ecuación $L = 2\pi r$. Para cada número positivo r existe un valor L, por lo que L es función de r.
b) El área A de una circunferencia depende de su radio r. La relación entre r y A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Para cada número positivo r existe un valor A, por lo que A es función de r.
c) El costo de enviar un paquete $C(p)$ a través de una empresa de envíos que cobra en función del peso p y de una tarifa fija. Si se conoce que la empresa cobra en dólares el cuadrado del peso en kilogramo de cada paquete y que la tarifa fija es de un dólar, entonces la función que representa el costo de envío se puede escribir como: $C(p) = p^2 + 1$.
d) La cantidad de información en bits $I(n)$ contenida en una cadena de caracteres de longitud n. Si se supone que cada carácter en la cadena se representa con 8 bits (un byte), entonces la cantidad de información en bits se puede calcular mediante la ecuación $I(n) = 8n$

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número se asigna otro número. En cada caso, el segundo número es función del primero. Es habitual que al primer número se le denote por variable independiente o abscisa y al segundo número como variable dependiente u ordenada. En el ejemplo a) r es la variable independiente y L es la variable dependiente.

Definición: Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f\ (x)$, de un conjunto E.

En términos más simples, una función es como una «máquina» que toma un número como entrada y produce otro número como resultado. Por ejemplo, si tenemos una función f que toma un número x como entrada y lo eleva al cuadrado, la función se vería así $f\ (x) = x^2$. Si ingresamos el número 3 en la función, obtendremos 9 como resultado: f (3) = 3^2 = 9.

Por lo tanto, una función es una regla matemática que transforma un número real de entrada en un número real de salida. Esta idea es fundamental en la matemática y se utiliza en muchas áreas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la informática.

Otra manera de representar una función es un diagrama de flechas como en la figura 1. Cada flecha une un elemento de D con un elemento de I. La flecha indica que $f\ (x)$ está asociada con x, $f\ (a)$ con a, y así sucesivamente.

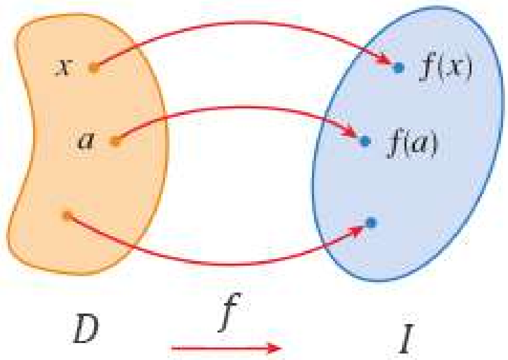


Figura 1. Diagrama de flechas para la función f.

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? La siguiente prueba responde esta interrogante.

PRUEBA DE LÍNEA VERTICAL: Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y solo si ninguna línea vertical se interseca con la curva más de una vez.

El gráfico de la figura 2 muestra la curva $x = y^2$. Como se puede observar, al aplicar la prueba de línea vertical se concluye que esta curva no es una función, porque tiene infinitas líneas verticales que se intersectan con la misma.

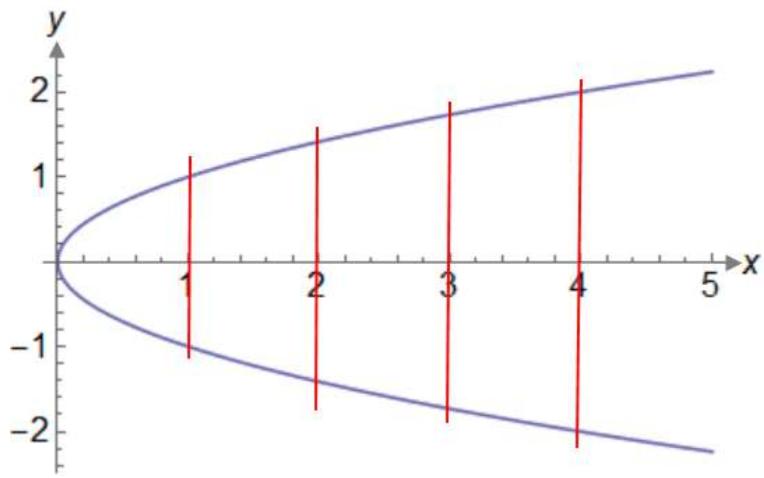


Figura 2. Ejemplo de curva en el plano que no es una función.

Sin embargo, si despejamos la variable y de la ecuación de la curva $x = y^2$, obtenemos las dos funciones siguientes: $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$, que son representadas gráficamente en la figura 3. Ambas gráficas verifican el cumplimiento de la prueba de línea vertical, por lo que propiamente ambas gráficas corresponden a funciones.

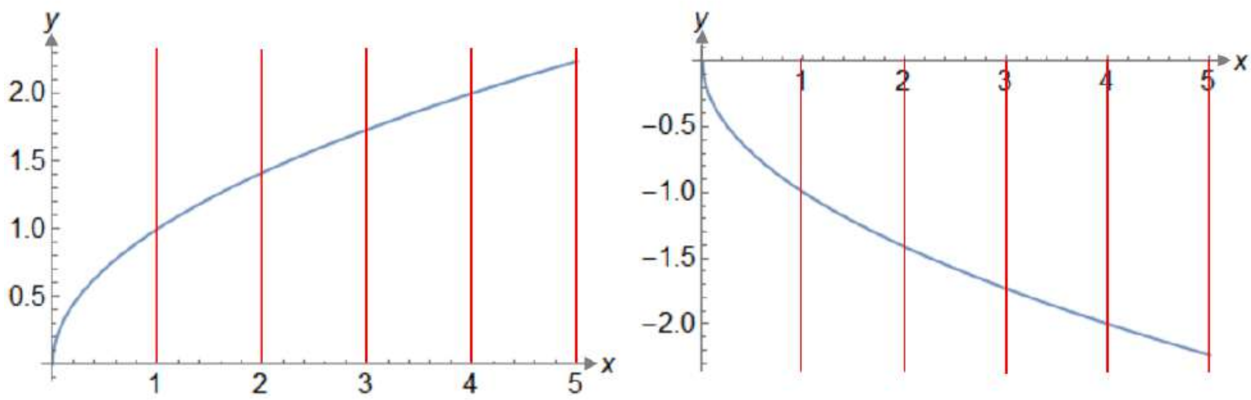


Figura 3. Dos funciones que verifican el cumplimiento de la prueba de línea vertical.

Hemos despejado de la ecuación de la curva la variable dependiente, obteniendo como resultado dos funciones. Este procedimiento podemos aplicarlo para estudiar algunas curvas a través de las funciones en las que se descomponen, siempre y cuando sea posible despejar la variable dependiente.

Es preciso señalar que existen cuatro maneras diferentes para representar una función:

- Verbalmente (mediante una descripción en palabras).
- Numéricamente (mediante una tabla de valores).
- Visualmente (mediante una gráfica).
- Algebraicamente, por medio de una fórmula explícita.

Todas estas formas de representar una función son pertinentes para lograr dominar el estudio de las funciones y sus aplicaciones en la resolución de diferentes problemas reales.

Ejemplo de representación de funciones

- **Verbalmente**: la función que describe la altura (en metros) de una pelota en función del tiempo (en segundos) después de haber sido lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 10 metros por segundo y una aceleración debido a la gravedad de 9.8 metros por segundo al cuadrado, está dada por el cuadrado del tiempo menos cuatro veces el tiempo más tres segundos. La función se puede interpretar como el resultado de la ecuación de la altura de la pelota, que tiene en cuenta la aceleración debida a la gravedad y la velocidad inicial de la pelota.
- **Algebraicamente**: la función se puede representar algebraicamente mediante la fórmula explícita $f(t) = t^2 - 4t + 3$. En esta ecuación, la variable t representa el tiempo después del lanzamiento de la pelota, y la función $f(t)$ representa la altura de la pelota en función del tiempo. La fórmula explícita se puede utilizar para calcular la altura de la pelota en cualquier momento después del lanzamiento.
- **Numéricamente**: la función $f(t) = t^2 - 4t + 3$ se puede representar numéricamente mediante una tabla de valores. Supongamos que queremos calcular

la altura de la pelota en los primeros 5 segundos después de haber sido lanzada. La tabla de valores se podría escribir como:

x	f(x)
0	3
1	0
2	-3
3	-4
4	-3
5	0

En esta tabla, la primera columna representa el tiempo después del lanzamiento de la pelota, y la segunda columna representa la altura de la pelota en función del tiempo.

- **Visualmente**: la función $f(t) = t^2 - 4t + 3$ se puede representar visualmente mediante la gráfica de la figura 4.

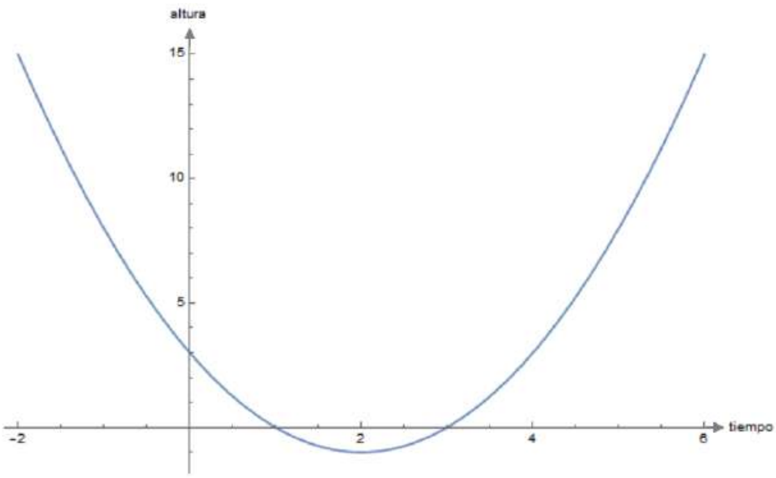


Figura 4. Ejemplo de representación gráfica de la función $\mathrm{f(t)} = \mathrm{t}^2 - 4\mathrm{t} + 3$.

La gráfica muestra la altura de la pelota en función del tiempo después del lanzamiento. La gráfica es una parábola que abre hacia arriba que tiene su vértice en (2,-1) y corta el eje y en los puntos (1, 0) y (3,0). La gráfica se puede interpretar como una representación visual de los valores numéricos de la tabla de valores.

1.2.2 *Dominio e imagen de una función*

Formalmente, una función de variable real se define como una tripleta ordenada (f, D, I), donde "f" es una regla o expresión matemática que relaciona los elementos de un conjunto "D" llamado dominio, con los elementos de otro conjunto "I" llamado imagen. El **dominio** "D" es el conjunto de valores para los cuales la función está definida, mientras que la **imagen** "I" es el conjunto de valores que la función toma como resultado.

Que el dominio de una función real sea el conjunto de todos los valores que la función está definida, puede interpretarse como el conjunto de valores que podemos "entrar" a la función para obtener una salida. Precisamente, esta salida es el conjunto de todos los valores que la función puede producir y conforma el conjunto imagen.

Es importante notar que una función puede tener ciertas restricciones en su dominio, es decir, que puedan existir ciertos valores que no es posible ingresar en la función. A continuación, se brindan ejemplos que ayudan a ilustrar la determinación de dominio e imagen de una función.

Ejemplos

Determinar el dominio e imagen de las siguientes funciones reales:

a) $f(x) = 1/x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

a) Si tenemos la función $f(x) = 1/x$, podemos observar que la misma está definida para todos los valores de x diferentes de cero, por lo que su es el conjunto de todos los números reales excepto cero, es decir, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Para encontrar la imagen de $f(x)$, debemos percatarnos que la función asigna a cada valor de entrada x un valor de salida $y = 1/x$. Como x puede ser cualquier número real diferente de cero, entonces y puede tomar cualquier valor real excepto cero. Entonces, su imagen es el conjunto de todos los números reales excepto cero $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$.

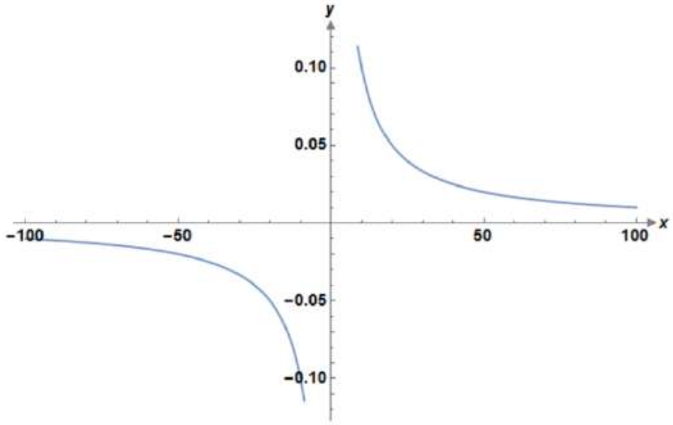


Figura 5. Representación gráfica de la función $f(x) = 1/x$.

b) La función $f(x) = ax^2$ donde a es un número real positivo, tiene como dominio el conjunto de todos los números reales $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$ y su imagen es el conjunto de todos los números reales no negativos $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$. Para cualquier número real "x" en el dominio, la función toma ese número como entrada, lo eleva al cuadrado, lo multiplica por a y produce un número real no negativo como salida. En la figura 6 se presenta la función para $a = 1, 2, 3, 4, 5$.

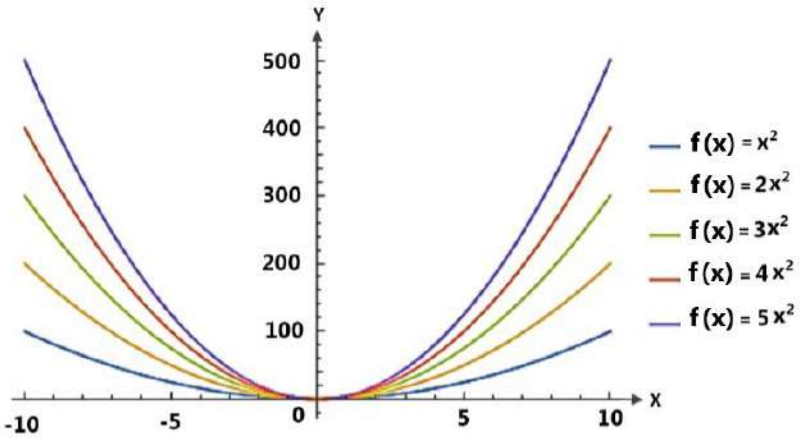


Figura 6. Ejemplo de la familia de funciones cuadráticas $f(x) = ax^2$, $a > 0$

c) La función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, el valor de la variable x debe ser no negativo, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Entonces, su dominio es $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. La imagen de la función es $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$. En la figura 7 se representa esta función.

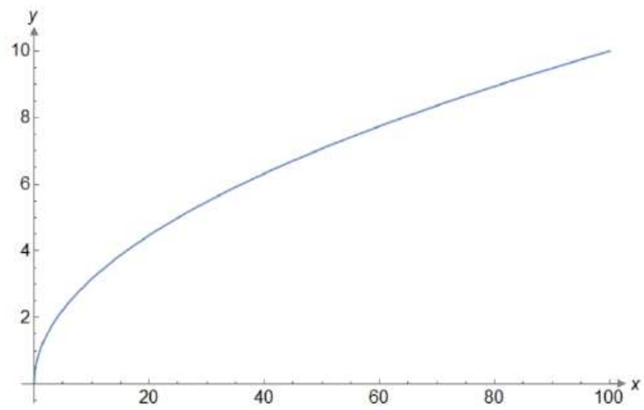


Figura 7. Representación gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

1.2.3 *Gráfica de una función*

La representación gráfica de las funciones es una herramienta esencial para el aprendizaje sobre funciones, pues permiten visualizar la relación entre los valores de entrada y los valores de salida de una función, lo que ayuda a comprender mejor los conceptos y propiedades de las funciones.

A continuación, se brindan algunos procedimientos clave para representar funciones:

- **Identificar el dominio y la imagen de la función**: esto es importante porque las representaciones gráficas solo muestran los valores de entrada y salida que la función puede tomar. Identificar el dominio y la imagen también ayuda a determinar los límites de la gráfica.
- **Elegir un rango adecuado para el eje de las x y el eje de las y**: esto es importante para que la gráfica sea fácil de leer y para que se puedan observar las características clave de la función.
- **Graficar puntos clave**: los puntos clave incluyen los puntos de intersección con los ejes x e y, los valores máximos y mínimos si los presenta la función, los puntos donde cambia la monotonía la función y, en general, todos aquellas análisis que ayuden a comprender mejor las características de la función.

- **Dibujar la curva que une los puntos clave**: esto permite obtener una representación visual de cómo la función varía entre los puntos clave identificados.
- **Etiquetar la gráfica**: esto incluye dar un título a la gráfica, etiquetar los ejes x e y, y agregar cualquier información adicional relevante.

Al seguir los procedimientos clave para representar funciones reales, los estudiantes pueden visualizar la relación entre los valores de entrada y los valores de salida de una función y comprender mejor los conceptos y propiedades de las funciones.

Ejemplos

Represente gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^{-x}$

b) $f(x) = (x-1)^3$

c) $f(x) = x^4$

Solución

a) $f(x) = 2^{-x}$

- El dominio e imagen de la función son:

  $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

- El rango para la variable independiente x de: $-6 \leq x \leq 6$ y para la variable dependiente y de: $0 \leq y \leq 6$ permite ilustrar las características clave de la función.
- La función intersecta al eje y en el punto (0, 1). Debe notarse que la función crece ilimitadamente en la medida que se aleja en el eje x negativo y que se aproxima a cero (pero sin lograr intersectar al eje x).
- Representación gráfica:

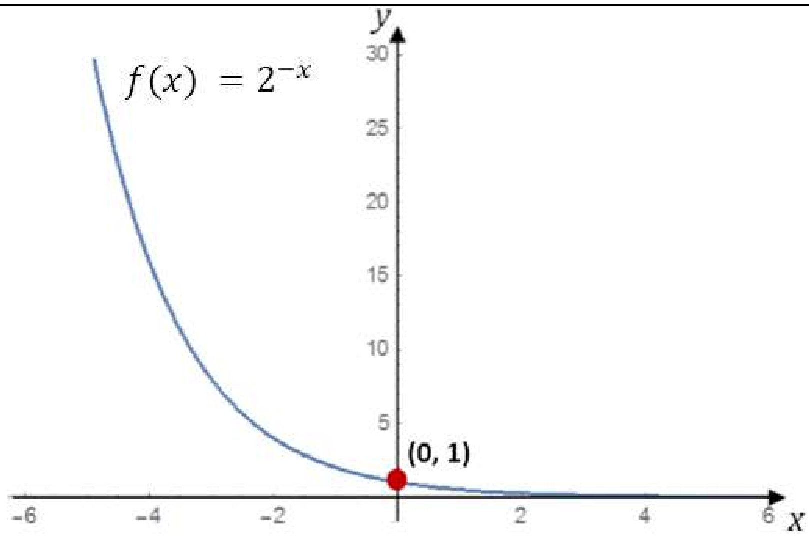


Figura 8. Representación gráfica de la función $f(x) = 2^{-x}$.

b) $f(x) = (x-1)^3$

- El dominio e imagen de la función son:

  $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

- El rango para la variable independiente x de: $-1 \leq x \leq 3$, y para la variable dependiente y de: $-5 \leq y \leq 5$ permite ilustrar las características clave de la función.

- La función intersecta al eje y en el punto (0, -1) e intercepta al eje x en el punto (1,0).

- Representación gráfica:

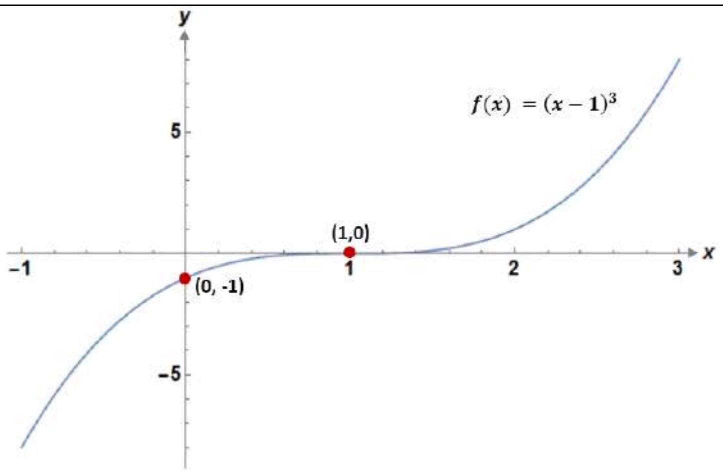


Figura 9. Representación gráfica de la función $f(x) = (x-1)^3$

c) $f(x) = x^4$

- El dominio e imagen de la función son:

  $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\}$

  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

- El rango para la variable independiente x de: $-3 \leq x \leq 3$, y para la variable dependiente y de: $0 \leq y \leq 80$ permite ilustrar las características clave de la función.
- La función intersecta a los ejes coordenados en el punto (0, 0).
- Representación gráfica:

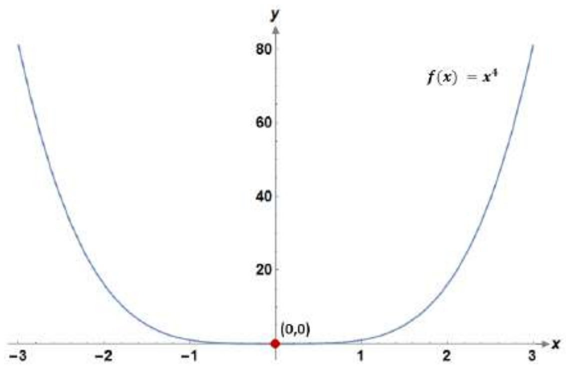


Figura 10. Representación gráfica de la función $f(x) = (x-1)^3$.

Es importante comprender que la representación gráfica de una función es solo una representación visual de la función y que no proporciona información completa sobre la misma. Por lo tanto, es necesario también aprender a utilizar otras representaciones como la tabla de valores y la fórmula, para comprender completamente una función.

1.3 Propiedades de las funciones elementales

El conocimiento de las propiedades de las funciones elementales, como la monotonía, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad y simetría respecto a los ejes, es fundamental en muchas áreas de las matemáticas y la ciencia. A continuación, se describen algunas de las razones por las que es importante conocer estas propiedades:

- **Ayuda a entender el comportamiento de las funciones**: el conocimiento de las propiedades de las funciones elementales permite entender cómo se comportan las funciones en diferentes intervalos y cómo se relacionan con otras funciones.
- **Facilita la resolución de problemas matemáticos**: el conocimiento de las propiedades de las funciones elementales puede ayudar a encontrar soluciones a problemas matemáticos y a simplificar cálculos.
- **Permite identificar funciones importantes**: las propiedades de las funciones elementales son comunes en muchas funciones importantes en matemáticas y ciencia.
- **Es útil en la representación de datos**: el conocimiento de las propiedades de las funciones elementales es muy útil en la representación de datos.

En general, el conocimiento de las propiedades de las funciones elementales es fundamental para comprender el comportamiento y la relación de las funciones en diferentes contextos matemáticos y científicos.

1.3.1 *Inyectividad*

Definición: Una función $f(x)$ es inyectiva si para todo par de valores x_1 y x_2 en el dominio de $f(x)$, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

La inyectividad de una función se refiere a la propiedad de que cada valor en el dominio de la función corresponde a un único valor en la imagen. Si dos valores distintos en el dominio corresponden al mismo valor en la imagen, entonces la función no es inyectiva.

Por ejemplo, si tenemos una función $f(x) = x^2$, podemos observar que se cumple que $f(2) = f(-2) = 4$, lo que significa que dos valores distintos en el dominio ($x = 2$ y $x = -2$) corresponden al mismo valor en la imagen ($y = 4$). Por lo tanto, la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva.

Por otro lado, si tenemos una función $f(x) = 2x + 3$, podemos observar que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $2 \cdot x_1 + 3 = 2 \cdot x_2 + 3$, lo que implica que $x_1 = x_2$. Por lo tanto, la función $f(x) = 2x + 3$ es inyectiva.

En general, podemos decir que una función es inyectiva si cada valor en el dominio de la función corresponde a un único valor en la imagen. Esto implica que no existen dos valores distintos en el dominio que correspondan al mismo valor en el rango. Si una función no es inyectiva, se dice que es una función no inyectiva.

Si utilizamos un diagrama de flechas que une un elemento de D con un elemento de I, entonces un ejemplo de función inyectiva es la que se presenta en la figura 11. Nótese que la función $f(x)$ le asigna valores diferentes a los cinco valores del conjunto D.

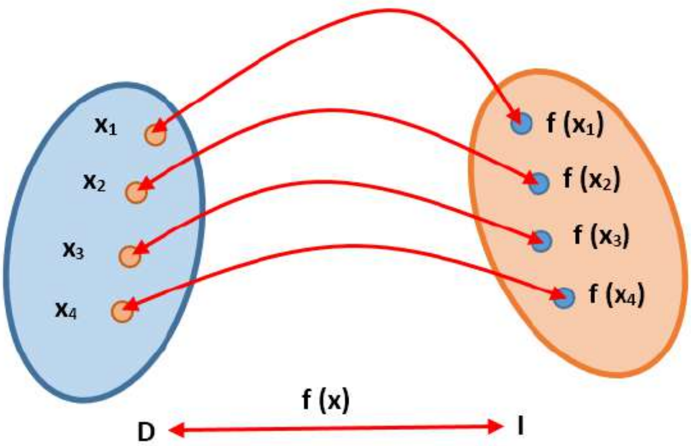


Figura 11. Diagrama de flechas que representa una función inyectiva.

Por otro lado, en la figura 12 se muestra una función no inyectiva. Nótese que en el diagrama de flechas que une un elemento de D con un elemento de I, existen valores del conjunto D que se convierten en un mismo valor del conjunto I, como por ejemplo

x_1 y x_2 se convierten en y_1, otro ejemplo son los valores x_4 y x_5 que se convierten en y_3.

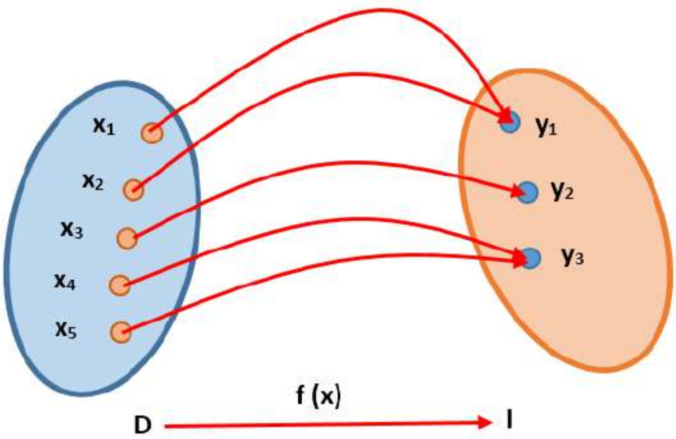


Figura 12. Diagrama de flechas que representa una función no inyectiva.

En general, para que una función sea no inyectiva es suficiente que existan dos puntos cualesquiera del dominio que se conviertan en un mismo elemento del conjunto imagen. No obstante, una función no inyectiva podría tener dos, tres, cuatro o más puntos del dominio que se conviertan en un único elemento del conjunto imagen. Tal es el caso de la función constante $\mathrm{f(x)} = \mathrm{c}$, en la cual infinitos puntos de su dominio ($\mathrm{Dom(f)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$) se convierten en un único elemento constante c ($\mathrm{Im(f)} = \{\mathrm{c} | \mathrm{c} \in \mathbb{R}\}$).

1.3.2 *Sobreyectividad*

Definición: Una función $f(x): D \rightarrow I$ se dice sobreyectiva si para todo elemento b en el conjunto I, existe al menos un elemento a en el conjunto D tal que $f(a) = b$.

La sobreyectividad es una propiedad que puede tener una función que relaciona dos conjuntos D y I. Cuando una función es sobreyectiva, significa que cada elemento del conjunto de llegada I tiene al menos un elemento en el conjunto de partida D que "se convierte" o "transforma" en él. En otras palabras, no existen elementos en I que no tengan una "preimagen" en D.

Por ejemplo, si consideramos la función $\mathrm{f(x)}: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ definida por $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2$, esta función no es sobreyectiva, ya que no hay ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Por lo tanto, el conjunto de llegada I es el conjunto de números reales no negativos. Si consideramos la función $g(x): R \to R$ definida por $g(x) = x + 1$, esta función sí es sobreyectiva, ya que, si tomamos cualquier número real y le sumamos 1, obtenemos otro número real, por lo que para todo elemento de I existe algún elemento de D que se transforma en él.

Si utilizamos un diagrama de flechas que une un elemento de D con un elemento de I, entonces un ejemplo de función sobreyectiva es la que se presenta en la figura 13. Note que todos los elementos del conjunto D .

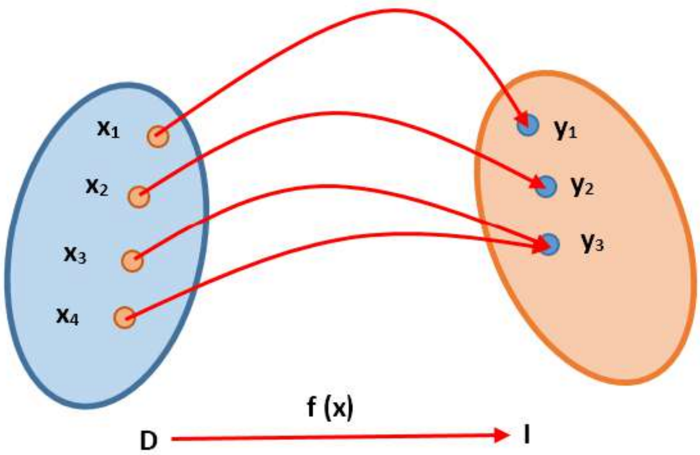


Figura 13. Diagrama de flechas que representa una función sobreyectiva.

Note que la función $f(x)$ de la figura 13 es sobreyectiva pero no inyectiva, por lo que no existe una relación de implicación entre la inyectividad y la sobreyectividad de una función. O sea, respecto a estas propiedades una función puede ser: a) inyectiva y no sobreyectiva, b) inyectiva y sobreyectiva, c) no inyectiva y sobreyectiva, d) no inyectiva y no sobreyectiva.

Precisamente, en la figura 14 se muestra una función que es no inyectiva y no sobreyectiva.

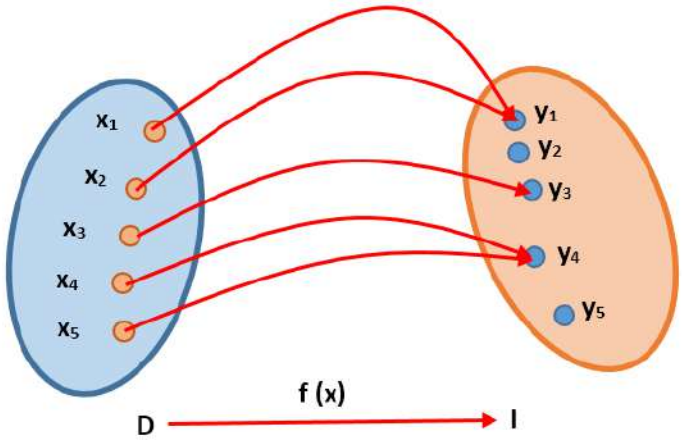


Figura 14. Diagrama de flechas que representa una función no sobreyectiva y no inyectiva.

Ejemplos

La función $f(x): R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^3$ es inyectiva y sobreyectiva, porque cada número real tiene una "preimagen" única (todos los números reales tienen una raíz cúbica real) y todos los números reales son alcanzables.

La función $g(x): R \rightarrow R$ definida por $h(x) = 2x + 1$ es inyectiva y sobreyectiva, porque cada número real tiene una "preimagen" única, y todos los números reales son alcanzables.

La función $h(x): R \rightarrow R$ definida por $h(x) = x^2$ no es inyectiva, pues basta encontrar dos elementos diferentes del dominio, por ejemplo $X_1 = 2$ y $X_2 = -2$ ($X_1 \neq X_2$) que tienen una misma imagen $f(2) = f(-2) = 4$. Esta función tampoco es sobreyectiva, porque, por ejemplo, no hay ningún número entero cuyo cuadrado sea igual a – 3.

1.3.3 *Biyectividad*

Definición: Una función real se considera biyectiva si cumple dos propiedades fundamentales: inyectividad y sobreyectividad.

Como ya habíamos visto anteriormente, una función es inyectiva si para cada elemento en el dominio, existe un único elemento de la imagen que le corresponde; mientras que una función es sobreyectiva si cada elemento en la imagen tiene al menos un elemento correspondiente en el dominio. La importancia de las funciones biyectivas radica en su capacidad para establecer una correspondencia uno a uno entre elementos del dominio y la imagen (ver figura 15). Esto permite una fácil inversión de la función, lo que es útil para resolver ecuaciones y realizar operaciones algebraicas y análisis matemático.

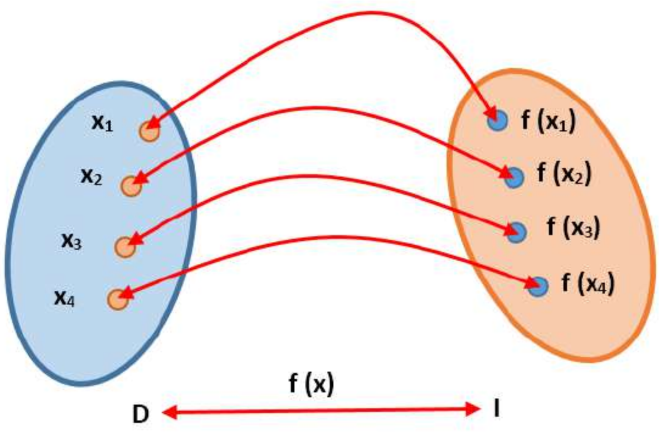


Figura 15. Diagrama de flechas que representa una función biyectiva.

Ejemplos

Ejemplos de funciones biyectivas:

- f(x) = x, donde el dominio y la imagen son todos los números reales. Esta es una función lineal simple que asigna cada número real a sí mismo. Es biyectiva porque cumple tanto la inyectividad como la sobreyectividad.
- f(x) = e^x, donde el dominio es todos los números reales y la imagen es el conjunto de números reales positivos. Esta función exponencial es biyectiva porque cada número real tiene una imagen en el conjunto de números reales positivos, y no hay dos elementos diferentes que compartan la misma imagen.

Ejemplos de funciones no biyectivas:

- f(x) = x^2, donde el dominio y la imagen son todos los números reales. Esta función cuadrática no es biyectiva porque, por ejemplo, los números 2 y –2 tienen la misma imagen (4) en la imagen.

- f(x) = sen (x), donde el dominio es todos los números reales y la imagen es el intervalo [-1, 1]. Esta función trigonométrica no es biyectiva porque hay infinitos elementos en el dominio que se asignan a la misma imagen debido a la periodicidad de la función.

1.3.4 *Función inversa*

Definición: Dada una función $f(x)$ de una variable real, la función inversa, denotada como $f^{-1}(x)$, es una función que deshace el efecto de la función original. En otras palabras, si aplicamos la función $f(x)$ a un valor x y luego aplicamos su función inversa $f^{-1}(x)$ a ese resultado, obtendremos nuevamente el valor original x.

Matemáticamente, esto se puede expresar de la siguiente manera:

Si $f(x)$ es una función de una variable real y $f^{-1}(x)$ es su función inversa, entonces $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ para todo x en el dominio de $f^{-1}(x)$.

Es importante destacar que para que una función tenga una función inversa, debe ser biyectiva. Esto se debe a que la función inversa debe ser capaz de establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos del dominio y la imagen.

Importancia de la función inversa:

La función inversa es fundamental en el análisis y la resolución de ecuaciones, ya que permite deshacer una transformación aplicada por una función original y encontrar el valor original de una variable. Algunos puntos clave sobre la importancia de la función inversa son:

- **Resolución de ecuaciones**: La función inversa permite encontrar soluciones a ecuaciones al deshacer una función aplicada a una variable. Por ejemplo, si tenemos la ecuación $f(x) = y$, podemos encontrar el valor de x aplicando la función inversa $f^{-1}(y)$ a ambos lados de la ecuación.
- **Representación gráfica**: La función inversa permite reflejar horizontalmente una gráfica de una función original. Esto es útil para comprender simetrías y patrones presentes en las funciones y analizar su comportamiento.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran las funciones inversas.

Ejemplos de funciones inversas:

- $f(x) = 2x$. La función original multiplica un número por 2. La función inversa sería $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, ya que al dividir el número por 2, obtenemos el valor original (ver figura 16).
- $f(x) = x^3$. La función original eleva un número al cubo. Su función inversa sería $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, que calcula la raíz cúbica del número, deshaciendo la operación original (ver figura 17).

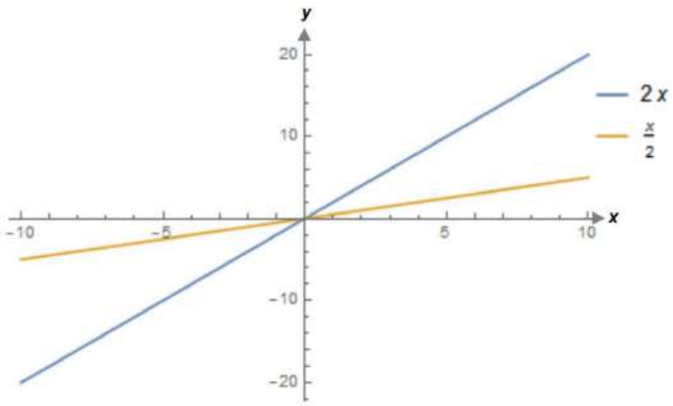


Figura 16. Representación gráfica de la función $f(x) = 2x$ y su función inversa $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

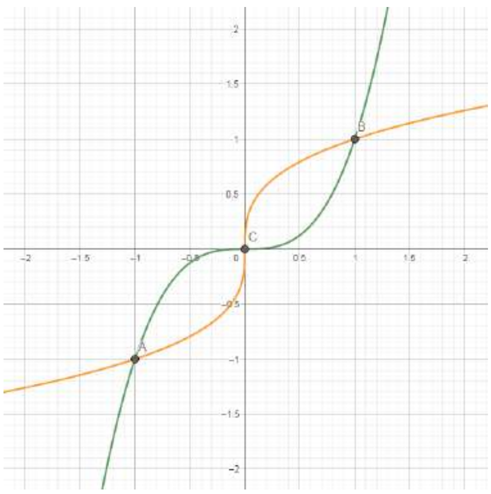


Figura 17. Representación gráfica de la función $f(x) = x^3$ y su función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Es importante tener en cuenta que no todas las funciones tienen una función inversa. Si una función no es biyectiva, es decir, si no cumple con la propiedad de inyectividad y sobreyectividad simultáneamente, no tendrá una función inversa bien definida.

1.3.5 *Monotonía de funciones*

Definición: La monotonía de una función real se refiere a la tendencia general de la función a medida que los valores del dominio aumentan o disminuyen. Se pueden distinguir dos tipos de monotonía: creciente y decreciente.

Función monótona creciente: Una función es monótona creciente si, a medida que los valores del dominio aumentan, los valores correspondientes a la imagen también aumentan o permanecen iguales.

Matemáticamente, esto se puede expresar de la siguiente manera: para funciones de una variable real, $f(x)$ es monótona creciente si, para cualquier par de elementos x_1 y x_2 en el dominio, se cumple que $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Función monótona decreciente: Una función es monótona decreciente si, a medida que los valores del dominio aumentan, los valores correspondientes en la imagen disminuyen o permanecen iguales.

Matemáticamente, esto se puede expresar de la siguiente manera: para funciones de una variable real, $f(x)$ es monótona decreciente si, para cualquier par de elementos x_1 y x_2 en el dominio, se cumple que $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Importancia de la monotonía de funciones:

El concepto de monotonía es fundamental en el análisis de funciones, ya que proporciona información sobre cómo la función se comporta a medida que los valores del dominio cambian. Algunos puntos clave sobre la importancia de la monotonía de funciones son:

Determinación de extremos: La monotonía de una función puede ayudar a identificar los máximos y mínimos relativos de la función. Por ejemplo, en una función monótona creciente, el máximo relativo ocurre en el extremo derecho del dominio, mientras que en una función monótona decreciente, el mínimo relativo se encuentra en el extremo derecho del dominio.

Análisis de intervalos: La monotonía de una función permite dividir el dominio en intervalos donde la función es creciente o decreciente. Esto es útil para estudiar el comportamiento local de la función y determinar si hay puntos donde cambia su monotonía.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran el comportamiento de la monotonía en funciones.

Ejemplos de funciones monótonas crecientes y decrecientes:

- f(x) = 2x. Esta función lineal es monótona creciente, ya que a medida que x aumenta, f(x) también aumenta proporcionalmente.
- f(x) = -x^2. Esta función cuadrática es monótona creciente en el intervalo (-∞,0], ya que a medida que x aumenta f(x) disminuye; y monótona decreciente en el intervalo [0, ∞), a medida que x aumenta f(x) también aumenta proporcionalmente (ver figura 18).

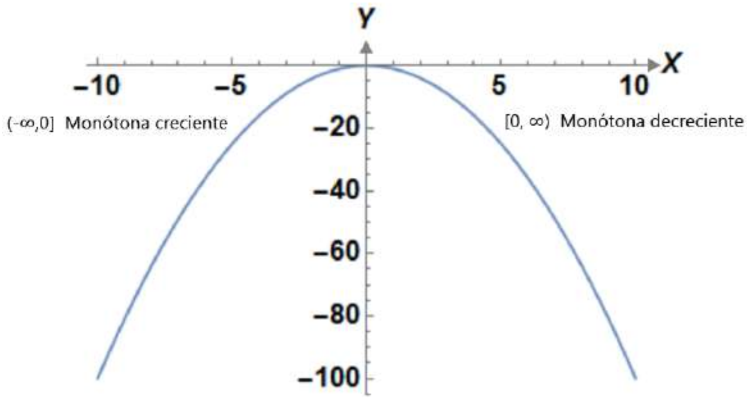


Figura 18. Representación gráfica de los intervalos de monotonía de $f(x) = -x^2$.

Es importante notar que una función puede ser monótona creciente o decreciente en todo su dominio o solo en un intervalo específico como en el caso de la figura 17. También es posible que una función no sea monótona, es decir, que sea ni creciente ni decreciente, si tiene puntos de inflexión o cambios en su comportamiento.

1.4 Análisis de las propiedades de algunas funciones elementales básicas

Conocer las propiedades de algunas funciones elementales básicas es de gran importancia en matemáticas y en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Estas funciones se encuentran entre las más comunes y se utilizan ampliamente en el análisis matemático y en la modelización de fenómenos naturales y procesos físicos. Aquí se presentan algunas razones por las cuales es importante familiarizarse con las propiedades de estas funciones:

- **Análisis y cálculo**: Las funciones elementales básicas, como las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, son fundamentales en el análisis y el cálculo. Las mismas se utilizan para estudiar el comportamiento de variables y realizar otros tipos de cálculos matemáticos esenciales. Comprender las propiedades de estas funciones facilita la resolución de problemas y el desarrollo de habilidades matemáticas avanzadas.
- **Modelización de fenómenos naturales y procesos físicos**: Las funciones elementales básicas se utilizan para modelar y describir una amplia gama de fenómenos naturales y procesos físicos en diversas disciplinas científicas. Al conocer las propiedades de estas funciones, podemos comprender mejor los fenómenos y procesos que se están modelando, lo que permite realizar predicciones y análisis más precisos.
- **Interpretación y análisis de datos**: Las funciones elementales básicas también son importantes en la interpretación y el análisis de datos. En muchas situaciones, los datos recopilados pueden ajustarse a un modelo matemático basado en una función elemental. Al comprender las propiedades de estas funciones, podemos ajustar y analizar los datos, realizar extrapolaciones e interpolaciones, identificar tendencias y patrones, y extraer conclusiones significativas. Esto es especialmente útil en campos como la estadística, la econometría, la biología, la física y muchas otras áreas donde se realizan análisis cuantitativos.
- **Herramientas en programación y ciencias de la computación**: Las funciones elementales básicas también son fundamentales en programación y ciencias de la computación. Estas funciones se utilizan en algoritmos y programas para realizar cálculos, generar gráficos, simular fenómenos, resolver problemas numéricos y realizar operaciones matemáticas complejas. Un conocimiento sólido de las

propiedades de estas funciones es esencial para escribir código eficiente y preciso, y para comprender y depurar algoritmos y programas.

Es por ello que estudiaremos la función lineal, cuadrática, valor absoluto, exponenciales, logarítmicas, así como algunas transformaciones y combinaciones entre funciones.

1.4.1 *Función lineal*

Definición: Una función lineal se define mediante la expresión matemática general:

$f(x) = mx + b$

Donde "m" es la pendiente de la recta y "b" es el término independiente u ordenada al origen.

Observaciones

Una función lineal tiene una representación gráfica que es una línea recta en el plano cartesiano. También es importante destacar que la pendiente "m" determina la inclinación de la recta, mientras que el término independiente "b" determina el punto de intersección con el eje y. En el caso que la pendiente m sea igual a cero entonces la función lineal se hace una constante igual a "b". Cuando $b = 0$ entonces la función lineal pasa por el origen de coordenadas, o sea, el punto (0,0).

Dominio: el dominio de una función lineal es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable "x". En el caso de una función lineal, el dominio es infinito, es decir, cualquier número real puede ser utilizado como entrada.

Imagen: la imagen de una función lineal es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable "y" (o "f(x)") como resultado de la función. En una función lineal, la imagen también es infinita, ya que cualquier número real puede ser obtenido como salida.

Ceros: los ceros de una función lineal son los valores de "x" para los cuales la función se anula, es decir, cuando $f(x) = 0$. En una función lineal, el cero se puede encontrar resolviendo la ecuación $mx + b = 0$, lo que da como resultado un único valor de "x".

Paridad: una función lineal no tiene paridad definida, ya que no cumple con la propiedad de simetría respecto al eje vertical (eje y). Es decir, f(x) no es igual a f(–x) para todos los valores de "x".

Imparidad: de manera similar a la paridad, una función lineal tampoco tiene imparidad definida, ya que no cumple con la propiedad de simetría respecto al origen (punto (0,0)). Es decir, f(x) no es igual a -f(x) para todos los valores de "x".

Monotonía: una función lineal puede ser creciente o decreciente, dependiendo del valor de la pendiente "m". Si "m" es positivo, la función es creciente, lo que significa que a medida que los valores de "x" aumentan, los valores de "f(x)" también aumentan. Si "m" es negativo, la función es decreciente, lo que implica que a medida que los valores de "x" aumentan, los valores de "f(x)" disminuyen.

Inyectividad: una función es inyectiva si cada valor de entrada tiene un único valor de salida. En el caso de una función lineal, si dos valores diferentes de "x" producen el mismo valor de "f(x)", entonces la función no es inyectiva. Esto ocurre cuando la pendiente "m" es igual a cero. En una función lineal con pendiente cero, todos los valores de "x" se mapean a un único valor constante de "f(x)". Sin embargo, en una función lineal con una pendiente distinta de cero, cada valor de "x" tiene un único valor correspondiente de "f(x)", lo que implica que la función es inyectiva.

Sobreyectividad: una función es sobreyectiva si para cada valor de salida existe al menos un valor de entrada correspondiente. En el caso de una función lineal, la función no es sobreyectiva cuando la pendiente "m" es igual a cero. En este caso, la función lineal se reduce a una constante y solo puede generar un valor específico de "f(x)". Sin embargo, si la pendiente "m" es diferente de cero, la función lineal puede cubrir todos los valores posibles en el rango. Por lo tanto, en este último caso, la función lineal es sobreyectiva.

Biyectividad: una función es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva. Una función lineal con una pendiente diferente de cero es tanto inyectiva como sobreyectiva, lo que implica que es biyectiva.

Ejemplos

- $f(x) = 2x + 3$ tiene pendiente positiva $m = 2$. Además, intercepta al eje de las ordenadas en el valor $y = 3$ (ver figura 19).
- $f(x) = -3x$ tiene pendiente negativa $m = -3$. Además, intercepta al eje de las ordenadas en el valor $y = 0$ (ver figura 19).
- $f(x) = 2$ es una función lineal constante con pendiente $m = 0$ (ver figura 19).

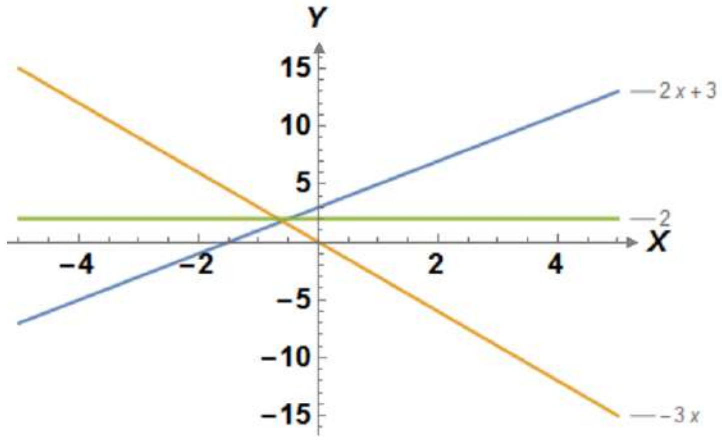


Figura 19. Representación gráfica de tres funciones lineales.

1.4.2 *Función cuadrática*

Definición: Una función cuadrática se define mediante la expresión matemática general:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Donde "a", "b" y "c" son constantes, y "x" es la variable independiente.

Geométricamente representa una parábola que abre hacia la parte positiva del eje x o hacia la parte negativa, en otras palabras, hacia arriba o hacia abajo.

Vértice: El vértice de una función cuadrática, también conocido como el punto de máximo o mínimo, se encuentra en el punto $(-b/2a, f(-b/2a))$. Este punto representa el extremo de una parábola y puede ser un máximo o un mínimo dependiendo del signo del coeficiente "a". Cuando "a" es positivo el valor extremo es un mínimo porque la parábola abre hacia arriba (decimos cóncava hacia arriba), cuando "a" es negativo el valor extremo es un máximo porque la parábola abre hacia abajo (decimos cóncava hacia abajo).

Ejemplo con funciones cuadráticas

La función cuadrática f(x) = $4x^2 - 8 - 1$ es una parábola que abre hacia arriba y tiene el vértice en el punto (1,0). Mientras que la función cuadrática f(x) = $-2x^2 - x + 1$ es una parábola que abre hacia abajo y tiene el vértice en el punto (1,0). Ambas funciones cuadráticas se representan gráficamente en la figura 20.

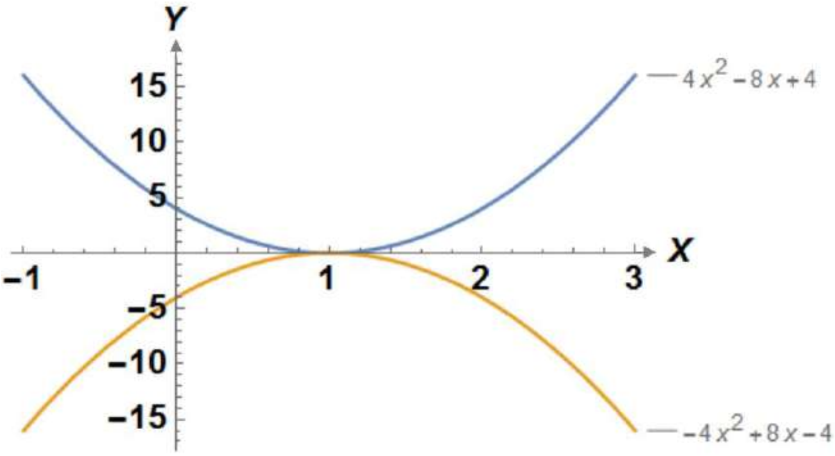


Figura 20. Representación gráfica de dos funciones cuadráticas.

Dominio: el dominio de una función cuadrática es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable "x". En el caso de una función cuadrática, el dominio es infinito, es decir, cualquier número real puede ser utilizado como entrada.

Imagen: la imagen de una función cuadrática es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable "y" (o "f(x)") como resultado de la función. En principio la imagen una función cuadrática puede ser cualquier número real, dependiendo de los valores de "a", "b" y "c". Pero debe tenerse en cuenta que la imagen se genera hacia arriba o hacia abajo, a partir del vértice de la parábola, por lo que siempre estará conformada por los valores mayores o iguales o menores o iguales que y = f (–b/2a) = $\frac{4ac-b^2}{4a}$

Ceros: los ceros de una función cuadrática son los valores de "x" para los cuales la función se anula, es decir, cuando f(x) = 0. Estos valores se pueden encontrar resolviendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando, por ejemplo, la *fórmula cuadrática*.

Fórmula cuadrática

La fórmula general para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es conocida como la fórmula cuadrática o fórmula general de Bhaskara. Esta fórmula se utiliza para obtener los valores de "x" que satisfacen la ecuación cuadrática. A continuación, se presenta la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En esta fórmula, "a", "b" y "c" son los coeficientes de la ecuación cuadrática. El signo "±" indica que se deben considerar ambas soluciones posibles, una con el signo positivo y otra con el signo negativo. La expresión dentro de la raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, se conoce como el discriminante de la ecuación cuadrática.

El discriminante juega un papel importante para determinar las soluciones de la ecuación cuadrática y proporciona información sobre la naturaleza de las soluciones:

- Si el discriminante es positivo ($b^2 - 4ac > 0$), entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y distintas.
- Si el discriminante es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$), entonces la ecuación cuadrática tiene una única solución real. En este caso, la solución es conocida como una raíz doble o una raíz repetida.
- Si el discriminante es negativo ($b^2 - 4ac < 0$), entonces la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

Es importante tener en cuenta que la fórmula cuadrática solo es aplicable a ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde "a" no es igual a cero. Si "a" es igual a cero, la ecuación no es cuadrática y se convierte en una ecuación lineal o constante, dependiendo del valor de "b" y "c".

Paridad e imparidad: una función cuadrática puede ser par, impar o ninguna de las dos.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces se tiene que:

$f(-x) = ax^2 - bx + c$ y que $-f(x) = -ax^2 - bx - c$.

Luego:

- Para que se cumpla que $f(-x) = f(x)$ (paridad) debe cumplirse que $b = -b$, y la única posibilidad es que $b = 0$. Luego se concluye que son pares las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$.
- Para que se cumpla que $f(-x) = -f(x)$ (impar) debe cumplirse que $a = -a$ y que $c = -c$, y la única posibilidad es que $a = c = 0$. Luego se concluye que son impares las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = bx$, o sea, las que tienen un comportamiento lineal y pasan por el origen de coordenadas.

Intervalos de monotonía: los intervalos de monotonía de una función cuadrática dependen del signo del coeficiente "a". Si "a" es positivo, la función es creciente en el intervalo $(-\infty$, vértice) y decreciente en el intervalo (vértice, ∞). Si "a" es negativo, la función es decreciente en el intervalo $(-\infty$, vértice) y creciente en el intervalo (vértice, ∞).

Inyectividad: una función cuadrática no es inyectiva, ya que dos valores diferentes de "x" pueden dar lugar al mismo valor de "f(x)".

Sobreyectividad: una función cuadrática no es sobreyectiva en general, ya que no puede cubrir todos los valores posibles en la imagen. El rango de una función cuadrática está determinado por el valor mínimo o máximo de la función.

Biyectividad: una función cuadrática no es biyectiva debido a su falta de inyectividad y sobreyectividad.

Otras características relevantes: algunas características adicionales de una función cuadrática incluyen su simetría respecto al eje vertical que pasa por el vértice, su eje de simetría definido por la línea vertical que pasa por el vértice, y la concavidad hacia arriba o hacia abajo de la parábola dependiendo del signo de "a".

1.4.3 *Función modular o valor absoluto*

Definición: la función modular, también conocida como función módulo o valor absoluto, se define mediante la siguiente expresión matemática:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donde:

f(x) representa la imagen o valor de la función para un valor dado de x.

|x| indica el valor absoluto de x, es decir, el valor numérico sin considerar su signo.

Representación gráfica de la función modular:

La figura 21 muestra la representación gráfica de la función f(x) = |x|.

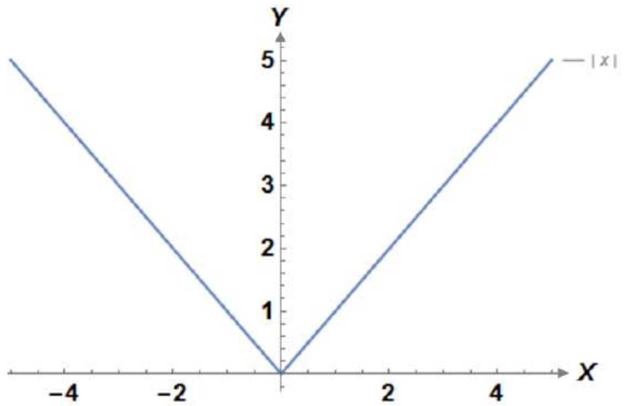


Figura 21. Representación gráfica de la función modular.

Dominio: el dominio de la función modular es el conjunto de todos los valores reales, ya que el valor absoluto se puede aplicar a cualquier número real.

Imagen: la imagen de la función modular es el conjunto de todos los valores no negativos. Para cualquier valor de x, el resultado del valor absoluto es siempre un número positivo o cero.

Ceros: los ceros de la función modular son los valores de x para los cuales la función se anula, es decir, f(x) = 0. En este caso, el único valor que cumple esta condición es x = 0.

Paridad e imparidad: la función modular es una función par, lo que significa que cumple con la propiedad de simetría respecto al eje y. Esto se expresa matemáticamente como f(x) = f(–x) para cualquier valor de x. Esta función tampoco es impar, ya que no cumple con la propiedad de simetría respecto al origen. Es decir, f(–x) no es igual a –f(x) para todos los valores de x.

Intervalos de monotonía: la función modular no es ni creciente ni decreciente en todo su dominio. En el intervalo (–∞, 0), la función es decreciente, mientras que en el intervalo (0, ∞) es creciente.

Inyectividad: la función modular no es inyectiva, lo que significa que dos valores diferentes de x pueden generar el mismo valor de f(x). Por ejemplo, f(–2) = f(2) = 2.

Sobreyectividad: la función modular no es sobreyectiva, lo que significa que para cualquier valor negativo no existe al menos un valor de x tal que f(x) = y. Esto se debe a que el valor absoluto siempre produce un valor no negativo.

Biyectividad: la función modular no es biyectiva, ya que no es inyectiva y sobreyectiva.

1.4.4 Funciones potenciales

Definición: Las funciones potenciales se definen mediante la siguiente expresión matemática:

$f(x) = x^a$

Donde "a" es un número real.

Ejemplos de funciones potenciales

Son ejemplos de funciones potenciales las siguientes:

- f(x)=x (a=1, ecuación lineal que pasa por el origen de coordenadas y divide simétricamente al primer y tercer cuadrantes)

- $f(x)=x^2$ (a=2, ecuación cuadrática que pasa por el origen de coordenadas y forma una parábola que abre hacia arriba)
- $f(x)=x^3$ (a=3, ecuación cúbica que pasa por el origen de coordenadas y que se representa en la figura 22).

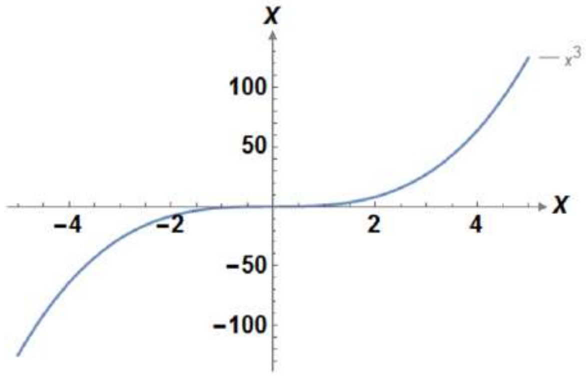


Figura 22. Representación gráfica de la función cúbica.

- $f(x)=x^{1/2}$ (a=1/2, ecuación radical, raíz cuadrada, que pasa por el origen de coordenadas, no tiene en su dominio valores negativos y que se representa en la figura 23).

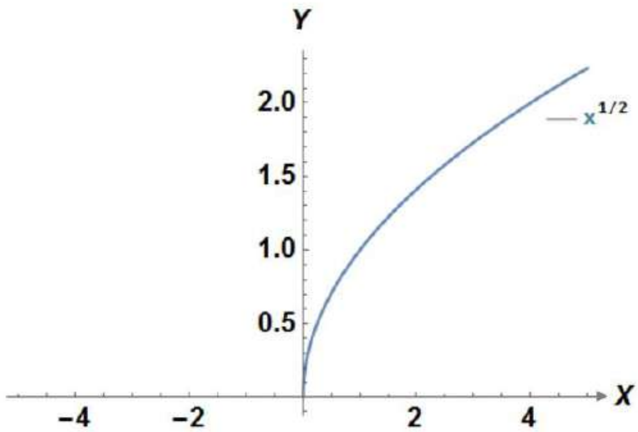


Figura 23. Representación gráfica de la función raíz cuadrada.

- $f(x)=x^{-1/2}$ (a=−1/2, ecuación con potencia negativa que se representa en la figura 24).

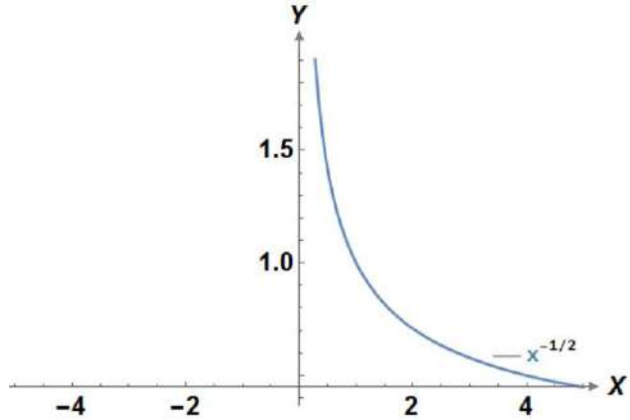


Figura 24. Representación gráfica de una función con potencia negativa.

Dominio: el dominio de una función potencial es para todos los números reales, excepto cuando "a" es un número par y x es negativo, ya que no está definida la raíz de un número negativo.

Imagen: la imagen de una función potencial depende del valor de "a". Si "a" es un número par, la imagen está compuesta por todos los números reales positivos. Si n es un número impar, la imagen consiste en todos los números reales.

Ceros: El único cero de una función potencial es $x = 0$.

Paridad e imparidad: Una función es par si cumple que $f(x) = f(-x)$ y es impar si cumple que $f(x) = -f(-x)$.

Consideremos una función potencial genérica de la forma $f(x) = x^a$, donde "a" es un número real. Al evaluar la función en un valor x, tenemos $f(x) = x^a$ y al Ahora evaluar la función en $-x$ tenemos que: $f(-x) = (-x)^a = (-1)^a * x^a$.

- *Paridad*: Para todos aquellos valores reales que $(-1)^a$ sea igual a 1, se cumple que $f(-x) = x^a = f(x)$, lo que significa que la función es par.
- *Imparidad*: Para todos aquellos valores reales que $(-1)^a$ sea igual a -1, se cumple que $f(-x) = -x^a = -f(x)$, lo que significa que la función es impar.

Observación: note que esos valores reales que toma "a" no se limitan a los números pares e impares. Ejemplo si $a = 2/3$ entonces $(-1)^{2/3} = 1$ y si es $a = 1/3$ entonces $(-1)^{1/3} = -1$.

Inyectividad: una función potencial puede ser inyectiva o no inyectiva, en dependencia del valor de "a". Ejemplo, $f(x) = x^2$ es no inyectiva y $f(x) = x^3$ es inyectiva.

Sobreyectividad: una función potencial puede ser sobreyectiva o no sobreyectiva en dependencia del valor de "a". Ejemplo, $f(x) = x^2$ es no sobreyectiva y $f(x) = x^3$ es sobreyectiva.

Biyectividad: una función potencial puede ser biyectiva o no biyectiva. Ejemplo, $f(x) = x^2$ es no biyectiva y $f(x) = x^3$ es biyectiva.

Intervalos de monotonía: La función potencial $f(x) = x^a$ puede ser monótona creciente o decreciente en todo su dominio o por intervalos. Por ejemplo:

- La función $f(x)=x^{-1/2}$ es monótona decreciente en todo su dominio $(0, \infty)$, ver figura 24.
- La función $f(x) = x^3$ es monótona creciente en todo su dominio $(-\infty, \infty)$, ver figura 22.
- La función $f(x)=x^{-1}$ es monótona decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y monótona creciente en el intervalo $(0, \infty)$, ver figura 25.

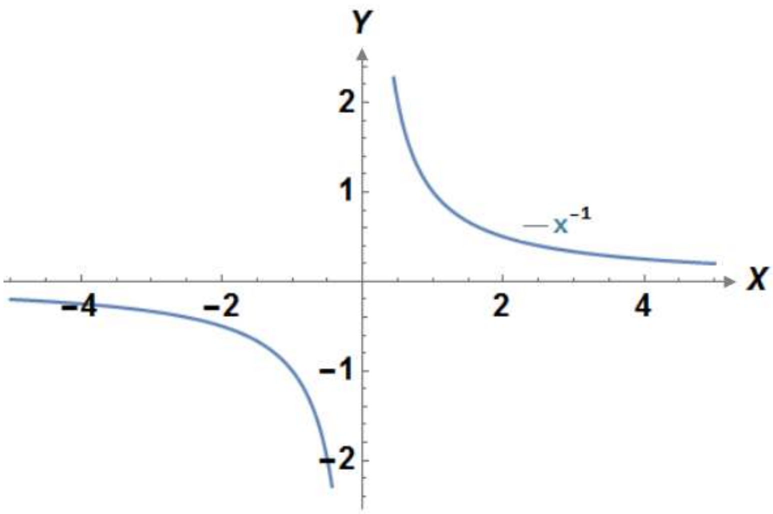


Figura 25. Representación gráfica de la función $f(x)=x^{-1}$.

1.4.5 *Funciones exponenciales*

Definición: La función exponencial se define mediante la siguiente expresión matemática:

$f(x) = a^x$

Donde:

$f(x)$ representa la imagen o valor de la función para un valor dado de x.

"a" es la base de la función exponencial, un número real positivo distinto de cero.

"x" es la variable independiente.

Ejemplos de función exponencial

Sea $f(x) = e^x$, donde "e" es una constante que se conoce como número de Euler o número e, es aproximadamente 2.71828. En la figura 26 se muestra una representación gráfica de esta función.

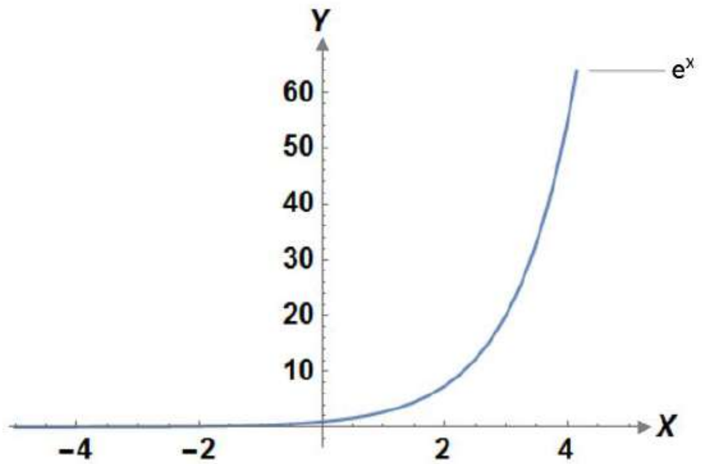


Figura 26. Representación gráfica de una función exponencial con base mayor que uno.

La función $f(x) = e^x$, donde "e" es la constante de Euler, tiene una importancia significativa en matemáticas y ciencias:

- **Relación con el crecimiento exponencial**: muchos fenómenos naturales y procesos científicos exhiben un crecimiento exponencial, y la función exponencial con base "e" es fundamental para modelar y comprender estos fenómenos.
- **Relación con la probabilidad y la estadística**: la función exponencial con base e es fundamental en la teoría de la probabilidad y la estadística. Se utiliza en la distribución exponencial, que es ampliamente utilizada para modelar el tiempo entre eventos en procesos estocásticos y para describir fenómenos de decaimiento y vida útil.
- **Relación con el cálculo de interés compuesto**: la función $f(x) = e^x$ está relacionada con el cálculo de interés compuesto. Cuando se aplica a problemas financieros, la función exponencial con base e se utiliza para calcular el crecimiento continuo de una inversión o deuda en función del tiempo.

La función $f(x) = (1/e)^x$, también tiene una importancia significativa en matemáticas y ciencias pues es útil para modelar fenómenos de decrecimiento exponencial. La figura 27 representa esta función.

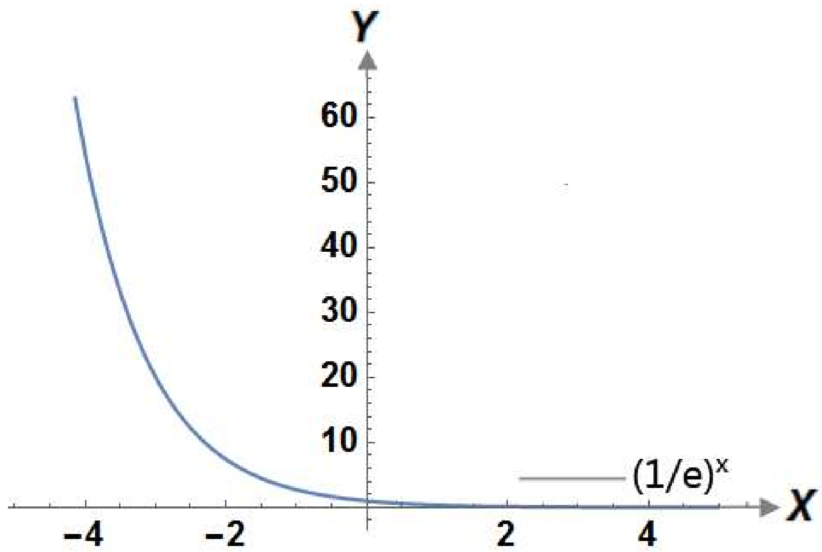


Figura 27. Representación gráfica de una función exponencial con base menor que uno.

Dominio: el dominio de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales, ya que se puede evaluar la función exponencial para cualquier valor de x.

Imagen: la imagen de la función exponencial depende de la base a. Si a es mayor que 1, la imagen de la función es el conjunto de todos los números reales positivos. Si a es menor que 1 pero mayor que 0, la imagen es el conjunto de todos los números reales positivos y el cero. Es decir, para $a < 1$, $f(x)$ puede ser cualquier número positivo o cero. Sin embargo, si a es igual a 1, la imagen de la función es simplemente el valor 1.

Ceros: conocemos que los ceros de la función exponencial se encuentran cuando $f(x) = 0$. Sin embargo, la función exponencial nunca se anula, ya que cualquier número elevado a cualquier exponente (incluso un exponente negativo) es siempre mayor que cero. Por lo tanto, la función exponencial no tiene ceros.

Paridad e imparidad: la función exponencial no es ni par ni impar. No cumple con la propiedad de simetría respecto al eje y (paridad) ni respecto al origen (imparidad). Es decir, $f(-x)$ no es igual a $-f(x)$ para todos los valores de x, y además $f(-x)$ no es igual a $-f(x)$ para todos los valores de x.

Intervalos de monotonía: la función exponencial es siempre creciente o decreciente, dependiendo del valor de la base a. Si $a > 1$, la función es creciente. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente. Esto significa que a medida que x aumenta, $f(x)$ aumenta o disminuye respectivamente.

Inyectividad: la función exponencial es inyectiva, ya que diferentes valores de x producen diferentes valores de $f(x)$.

Sobreyectividad: la función exponencial no es sobreyectiva, lo que significa que para cualquier número real negativo no existe un valor de x tal que $f(x) = y$.

Biyectividad: la función exponencial no es biyectiva, ya que no es sobreyectiva.

1.4.6 *Funciones logarítmicas*

Definición: la función logarítmica se define mediante la expresión matemática general:

$f(x) = \log_a(x)$

donde "a" es la base del logaritmo y "x" es el argumento del logaritmo. El logaritmo se toma en base a y representa el exponente al cual se debe elevar a la base a para obtener el valor x.

Ejemplos de funciones logarítmicas

- $f(x) = \log_{10}(x)$ (La base es 10 mayor que la unidad). En la figura 28 se representa gráficamente la función logarítmica $f(x) = \log_{10}(x)$.

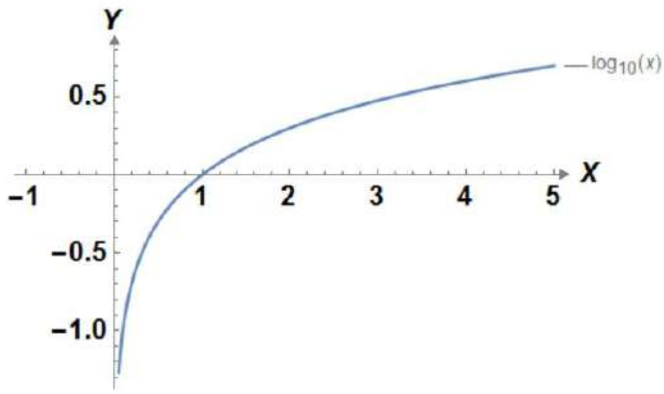


Figura 28. Representación gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_{10}(x)$.

- $f(x) = \log_{1/10}(x)$ (La base es 1/10 menor que la unidad). En la figura 29 se representa gráficamente la función logarítmica $f(x) = \log_{10}(x)$.

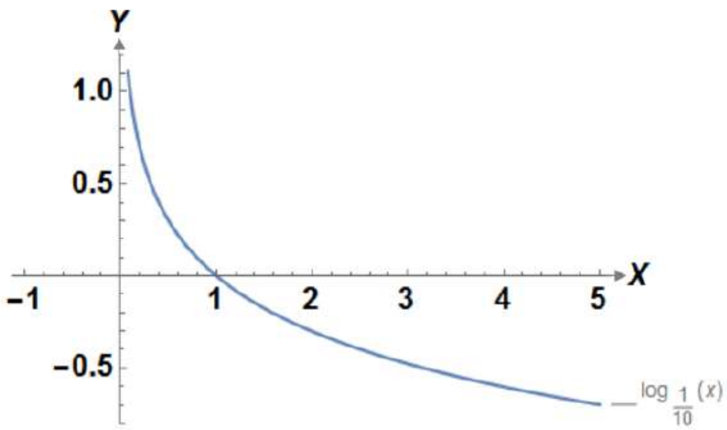


Figura 29. Representación gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_{10}(x)$.

Dominio: el dominio de la función logarítmica está definido por el conjunto de números reales positivos, ya que los logaritmos no están definidos para números negativos ni para cero. Por lo tanto, el dominio es: $\{x > 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Imagen: la imagen de la función logarítmica depende de la base "a" utilizada. Si "a" es mayor que 1 ($a > 1$), entonces la imagen es el conjunto de todos los números reales

$\{ y \in \mathbb{R}\}$. Pero en los casos siguientes 0 < a < 1 la imagen es el conjunto de todos los números reales negativos $\{y < 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Ceros: la función logarítmica no tiene ceros.

Paridad e imparidad: la función logarítmica no es par ni impar. Esto se debe a que f(–x) no es igual a f(x) ni a –f(x) para todos los valores de x en el dominio.

Inyectividad: la función logarítmica es inyectiva en su dominio, lo que significa que cada valor de x se corresponde con un único valor de f(x). Sin embargo, es importante recordar que la función logarítmica solo está definida en el dominio restringido (x > 0).

Sobreyectividad: la función logarítmica no es sobreyectiva en su imagen, ya que no cubre todo el conjunto de números reales. La imagen está limitada por la base a utilizada.

Biyectividad: la función logarítmica no es biyectiva, ya que no es tanto inyectiva como sobreyectiva al mismo tiempo.

Intervalos de monotonía: la función logarítmica es estrictamente creciente en su dominio (x > 0) para cualquier base a mayor que 1 (a > 1). Si 0 < a < 1, entonces la función logarítmica es estrictamente decreciente en su dominio.

Otras características relevantes: la función logarítmica tiene la propiedad de inversa de la función exponencial. Es decir, si $f(x) = \log_a (x)$ y $g(x) = a^x$, entonces f(g(x)) = x y g(f(x)) = x para todos los x en sus respectivos dominios.

Es importante tener en cuenta que existen diferentes convenciones y notaciones para los logaritmos, ln(x) para el logaritmo natural (base e) y Log(x) para el logaritmo decimal (base 10), que son ampliamente utilizados en matemáticas y ciencias.

Observación

A continuación, se presenta un resumen de las principales propiedades de las operaciones con logaritmos:

1. **Propiedad de la potencia**: $\log_a(x^m) = m * \log_a(x)$

   Esta propiedad establece que el logaritmo de una potencia de x es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de x.

2. **Propiedad del producto**: $\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

   Esta propiedad indica que el logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de esos números.

3. **Propiedad del cociente**: $\log_a (x / y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Esta propiedad establece que el logaritmo del cociente de dos números es igual a la resta de los logaritmos de esos números.

4. **Propiedad del cambio de base**: $\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$

   Esta propiedad permite cambiar la base del logaritmo. Si se conoce el logaritmo de "x" en base "a", se puede calcular su logaritmo en base "b" dividiendo el logaritmo de "x" en base "b" entre el logaritmo de "a" en base "b".

5. **Propiedad de la potencia de la base**: $\log_a(a^m) = m$

   Esta propiedad establece que el logaritmo de una potencia de la base "a" es igual al exponente "m".

6. **Propiedad del logaritmo de 1**: $\log_a(1) = 0$

   El logaritmo de 1 en cualquier base es siempre igual a 0.

7. **Propiedad del logaritmo de la base**: $\log_a(a) = 1$

   El logaritmo de la base a en la misma base es siempre igual a 1.

1.5 Transformaciones y combinaciones en funciones elementales

En el Anexo de este libro se brindan algunas informaciones de las funciones trigonométricas, las que el estudiante ha estudiado con detenimiento en los niveles educativos precedentes.

Por otro lado, cabe señalar que las transformaciones y combinaciones entre funciones elementales son operaciones que se pueden realizar para modificar o combinar diferentes funciones. Estas operaciones permiten obtener nuevas funciones a partir de las funciones elementales básicas, como las lineales, cuadráticas, modulares, potenciales, exponenciales y logarítmicas. A continuación, se explicará en qué consisten estas operaciones y se darán ejemplos de cada una.

Transformaciones de funciones: implican modificar una función básica al aplicarle ciertas operaciones algebraicas o geométricas. Las principales transformaciones son:

a) **Desplazamiento o traslación horizontal**: consiste en desplazar la función hacia la izquierda o hacia la derecha en el eje x. Si tenemos una función f(x), su traslación horizontal se denota como f(x – a), donde "a" representa la cantidad de unidades de desplazamiento.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se desplaza dos unidades hacia la derecha al aplicar la transformación $f(x - 2)$, lo que resulta en $f(x - 2) = (x - 2)^2$.

b) **Desplazamiento o traslación vertical**: consiste en desplazar la función hacia arriba o hacia abajo en el eje y. Si tenemos una función f(x), su traslación vertical se denota como f(x) + b, donde "b" representa la cantidad de unidades de desplazamiento.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se desplaza tres unidades hacia arriba al aplicar la transformación f(x) + 3, lo que resulta en $f(x) + 3 = x^2 + 3$.

c) **Reflexión o simetría respecto al eje x o al eje y**: consiste en reflejar la función respecto al eje x o al eje y. Si tenemos una función f(x), su reflexión respecto al eje x se denota como –f(x), mientras que la reflexión respecto al eje y se denota como f(–x).

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se refleja respecto al eje x al aplicar la transformación –f(x), lo que resulta en $-f(x) = -x^2$.

Combinaciones de funciones: implican operar dos o más funciones elementales para obtener una nueva función.

Las principales combinaciones son:

Suma y resta: para sumar o restar dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, se suman o restan los valores de $f(x)$ y $g(x)$ para cada valor de x. Es decir, la suma de $f(x)$ y $g(x)$ se representa como $f(x) + g(x)$, y la resta de $f(x)$ y $g(x)$ se representa como $f(x) - g(x)$

Por ejemplo:

- La suma de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$ es $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x$.
- La resta de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$ es $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x$.

Multiplicación: para multiplicar dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, se multiplican los valores de $f(x)$ y $g(x)$ para cada valor de x. Es decir, el producto de $f(x)$ y $g(x)$ se representa como $f(x) \cdot g(x)$.

Por ejemplo, el producto de las funciones f(x) = x^2 y g(x) = 2x es h(x) = f(x) * g(x) = $2x^3$.

División: para dividir dos funciones reales f(x) y g(x), se dividen los valores de f(x) entre los valores de g(x) para cada valor de x, siempre y cuando g(x) no sea cero. Es decir, el cociente de f(x) y g(x) se representa como f(x) / g(x).

Por ejemplo, la división de las funciones f(x) = x^2 y g(x) = 2x es h(x) = f(x) / g(x) = x / 2.

c) **Composición de funciones**: la composición de funciones es una operación en la cual se toma una función y se aplica otra función a su resultado. Esto se denota como (f o g), donde (f) y (g) son funciones. Para el proceso de composición se toma el resultado de la función (g) y se utiliza como entrada para la función (f). Matemáticamente, la composición se define como: (f o g)(x) = f(g(x)). En otras palabras, se evalúa primero la función (g) en (x), y luego se evalúa la función (f) en el resultado de (g(x)).

Para que la composición de funciones sea posible, es necesario que el dominio de la función (g) coincida con la imagen de la función (f). Esto significa que la imagen de la función (g) debe ser un subconjunto del dominio de la función (f).

Algunos ejemplos que ilustran el proceso de composición de funciones son los siguientes:

- Ejemplo con funciones lineales: si tenemos las funciones f(x) = 2x y g(x) = x + 3, la composición sería: (f o g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6
- Ejemplo con funciones exponenciales y logarítmicas: si tenemos las funciones f(x) = e^x y g(x) = ln(x), la composición sería: (f o g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = $e^{\ln(x)}$ = x

Para que la composición de funciones esté definida, es importante verificar la compatibilidad de los dominios e imagen de las funciones involucradas.

Cada tipo de función elemental tiene sus propias propiedades y características específicas, como la forma de su gráfica, sus puntos críticos, su dominio e imagen, entre otros, las que influyen en alguna medida en las transformaciones y combinaciones posibles entre funciones elementales.

La importancia de estudiar y comprender estas transformaciones y combinaciones radica en que nos permiten ampliar nuestro conocimiento y comprensión de las funciones reales. Al aplicar estas operaciones, podemos generar una variedad de funciones con diferentes comportamientos y características, lo que nos ayuda a modelar fenómenos y resolver problemas matemáticos y científicos de manera más precisa.

Además, estas operaciones son fundamentales para el estudio de la función compuesta, la cual juega un papel central en áreas como el cálculo y el análisis matemático. Al comprender las transformaciones y combinaciones de funciones elementales, podemos avanzar hacia un análisis más profundo y sofisticado de las funciones reales y su comportamiento en diferentes contextos.

1.6 Ejercicios del capítulo

En esta sección los estudiantes deben poner en práctica sus conocimientos y desarrollar sus habilidades para comprender los ejercicios y problemas que se presentan, así como para resolver aquellos que se les proponen.

1.6.1 Ejercicios resueltos

A continuación, se proponen un conjunto de ejercicios para sistematizar el contenido tratado en el capítulo:

1. Defina una función real y de un ejemplo de una función real.
2. Represente gráficamente la función $f(x) = 2x - 1$ en un sistema de coordenadas.
3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

_____a) Toda función real tiene un único número real en su imagen.

_____b) Una función puede tener más de un número real en su dominio.

_____c) Toda función real es una relación matemática.

4. Encuentre la función inversa de la función $f(x) = 3x + 2$.
5. Dibuje la gráfica de la función cuadrática $g(x) = x2 - 4x + 3$.
6. Calcule el valor absoluto de los siguientes números: $|-5|$, $|0|$, $|3.5|$.
7. En qué valor x la función exponencial $f(x) = 2x$ alcanza el valor 16.

8. Encuentre el valor de x en el que la función logarítmica $f(x) = \log_2(x)$ alcanza el valor 4.

9. Función Lineal:

a) Considera la función $f(x) = 2x - 3$. Encuentra el dominio, imagen y los ceros de la función.

b) Determina si la función $f(x) = 4x + 1$ es par, impar o ninguna de las dos.

c) Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la función $f(x) = -3x + 5$.

10. Función Cuadrática:

a) Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, encuentra los ceros de la función y determina si es creciente o decreciente.

b) Encuentra el vértice de la función $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

c) Representa gráficamente la función $h(x) = (x - 2)^2 - 1$ y encuentre el valor de la función que alcanza el menor valor.

11. Función Modular:

a) Considera la función $f(x) = |x|$. Encuentra el dominio, imagen y los ceros de la función.

b) Determina si la función $f(x) = |x - 1|$ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

c) Realiza una transformación horizontal de la función $f(x) = |x|$ desplazándola dos unidades a la derecha.

12. Función Exponencial:

a) Dada la función $f(x) = 2^x$, encuentra el dominio, imagen y los ceros de la función.

b) Determina si la función $f(x) = 3^{(x - 1)}$ es creciente o decreciente.

c) Realiza una transformación vertical de la función $f(x) = 2^x$ multiplicándola por un factor de 3.

13. Función Potencial:

a) Considera la función $f(x) = x^3$. Encuentra el dominio, imagen y los ceros de la función.

b) Determina si la función $f(x) = x^2$ es par, impar o ninguna de las dos.

c) Realiza una transformación vertical de la función $f(x) = x^3$ multiplicándola por un factor de 2.

14. Función Logarítmica:

a) Dada la función $f(x) = \log_3(x)$, encuentra el dominio, imagen y los ceros de la función.

b) Determina si la función $f(x) = \log_2(x + 1)$ es creciente o decreciente.

c) Realiza una transformación horizontal de la función $f(x) = \log_3(x)$ desplazándola dos unidades a la derecha.

Respuestas:

1. Una función real es una relación matemática que asigna a cada número real en su dominio un único número real en su imagen. Ejemplo: $f(x) = x^2$, donde el dominio es el conjunto de todos los números reales y la imagen es el conjunto de números reales no negativos.

2. La gráfica de $f(x) = 2x – 1$ es la que se presenta en la figura una línea recta que pasa por el punto (–1, –3) y tiene una pendiente de 2. La representación gráfica sería una línea que se inclina hacia arriba desde el punto (–1, –3).

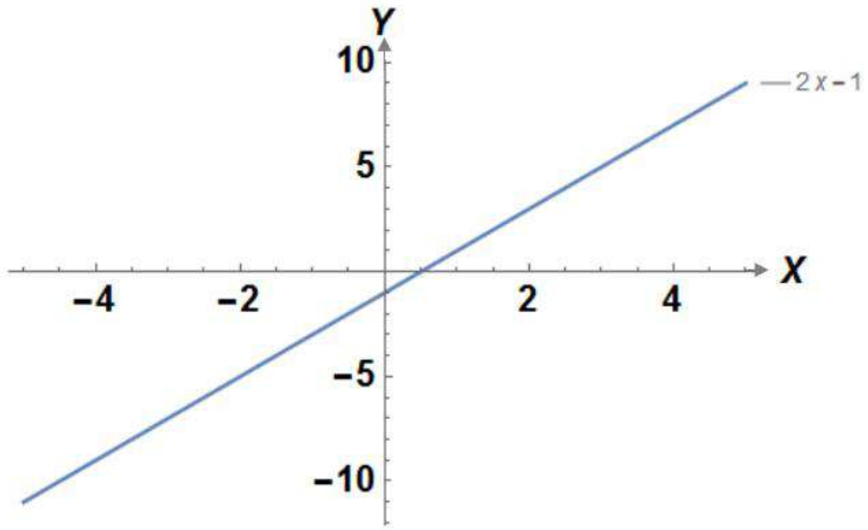


Figura 30. Representación de una función lineal en un eje de coordenadas cartesianas.

3. Afirmaciones verdaderas o falsas:

a) **Verdadera**. Toda función real asigna un único número real en su imagen.

b) **Verdadera**. Una función puede tener múltiples números reales en su dominio.

c) **Verdadera**. Toda función real es una relación matemática que asigna elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto.

4. La función inversa de $f(x) = 3x + 2$ es $f^{-1}(x) = (x - 2) / 3$.

5. La gráfica de la función cuadrática $g(x) = x^2 - 4x + 3$ es una parábola que se abre hacia arriba y tiene vértice en el punto (2, –1), ver figura 31.

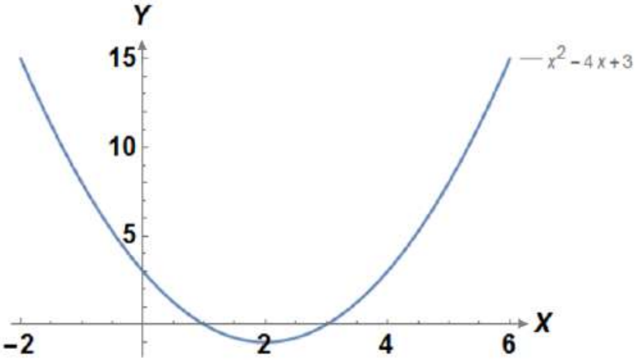


Figura 31. Representación gráfica de una función cuadrática.

6. El valor absoluto de |–5| es 5, el valor absoluto de |0| es 0 y el valor absoluto de |3.5| es 3.5.

7. En x = 4 la función exponencial $f(x) = 2^x$ es igual a 16, ya que 2 elevado a la cuarta potencia es igual a 16.

8. En x = 16 la función logarítmica $f(x) = \log_2(x)$ alcanza el valor 4, pues $f(x) = \log_2(x) = 4$, al despejar la x obtenemos $x = 2^4 = 16$.

9. Función Lineal:

a) El dominio es el conjunto de todos los números reales. La imagen es el conjunto de todos los números reales. Los ceros de la función son x = 1.5.

b) La función $f(x) = 4x + 1$ es una función lineal que no es par ni impar, pues se verifica fácilmente que $f(-1) \neq f(x)$ y que $f(-1) \neq -f(x)$.

c) La pendiente de la función $f(x) = -3x + 5$ es -3 y la ordenada al origen es 5.

10. Función Cuadrática:

a) Los ceros de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ son x = 1 y x = 3. La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y creciente en el intervalo $(2, \infty)$.

b) El vértice de la función $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$ se encuentra en el punto (1, 3).

c) La función $h(x) = (x - 2)^2 - 1$ es una parábola que se abre hacia arriba, tiene vértice en el punto $(2, -1)$, por lo que el valor menor de la función es $f(2) = 1$.

11. Función Modular:

a) El dominio de la función $f(x) = |x|$ es el conjunto de todos los números reales. La imagen es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a cero. Los ceros de la función son $x = 0$.

b) La función $f(x) = |x - 1|$ no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo tanto, no es biyectiva.

c) La transformación horizontal de la función $f(x) = |x|$ desplazada dos unidades a la derecha es $f(x) = |x - 2|$.

12. Función Exponencial:

a) El dominio de la función $f(x) = 2^x$ es el conjunto de todos los números reales. La imagen es el conjunto de todos los números reales positivos. La función no tiene ceros.

b) La función $f(x) = 3^{(x - 1)}$ es una función exponencial creciente en todo su dominio.

c) La transformación vertical de $f(x) = 2^x$ multiplicada por un factor de 3 es $f(x) = 3 * 2^x$.

13. Función Potencial:

a) El dominio de la función $f(x) = x^3$ es el conjunto de todos los números reales. La imagen es el conjunto de todos los números reales. Los ceros de la función son $x = 0$.

b) La función $f(x) = x^2$ es una función par.

c) La transformación vertical de la función $f(x) = x^3$ multiplicada por un factor de 2 es $f(x) = 2x^3$.

14. Función Logarítmica:

a) El dominio de la función $f(x) = \log_3(x)$ es el conjunto de todos los números reales mayores a cero. La imagen es el conjunto de todos los números reales. Los ceros de la función son $x = 1$.

b) La función $f(x) = \log_2(x + 1)$ es una función logarítmica creciente.

- c) La transformación horizontal de la función $f(x) = \log_3(x)$ desplazada dos unidades a la derecha es $f(x) = \log_3(x - 2)$.

1.6.2 Ejercicios propuestos

Función Lineal:

a) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–2, 5) y (3, -1).

b) Determina si la función $f(x) = -3x + 4$ es creciente o decreciente.

c) Encuentra el valor de x para el cual $f(x) = 2x - 3$ es igual a cero.

Función Cuadrática:

a) Encuentra las coordenadas del vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Determina si la función $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ tiene un máximo o un mínimo.

c) Encuentra los ceros de la función $h(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Función Modular:

a) Encuentra el valor de x para el cual $f(x) = |x - 2|$ es igual a 3.

b) Determina si la función $g(x) = |2x + 1|$ es par o impar.

c) Grafica la función $h(x) = |x + 1| - 2$.

Función Exponencial:

a) Encuentra el valor de x en la ecuación $2^{(x-3)} = 4$.

b) Determina si la función $f(x) = 3^{(x+2)}$ es creciente o decreciente.

c) Calcula f(2) para la función $g(x) = 5^x$.

Función Potencial:

a) Encuentra el valor de x en la ecuación $2^x = 16$.

b) Determina si la función $f(x) = x^3$ es inyectiva o no.

c) Calcula f(4) para la función $g(x) = 3^{(x-1)}$.

1.7 Recursos tecnológicos y didácticos

A continuación, se presentan algunos recursos tecnológicos y didácticos que pueden ser útiles tanto para estudiantes como para profesores al estudiar y enseñar funciones reales. Estos recursos pueden ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos y facilitar la resolución de problemas.

1.7.1 Recursos tecnológicos

- **Software de gráficos**: Utiliza software como GeoGebra (https://www.geogebra.org/graphing) o Desmos, que permiten graficar funciones de manera interactiva. Los estudiantes pueden explorar diferentes funciones, variar parámetros y observar cómo cambian las gráficas en tiempo real.
- **Calculadoras gráficas**: Las calculadoras gráficas son herramientas útiles para visualizar y analizar funciones. Los estudiantes pueden trazar gráficas, encontrar puntos de intersección y realizar otras operaciones relacionadas con las funciones.
- **Aplicaciones móviles**: Hay varias aplicaciones móviles disponibles que ofrecen una experiencia interactiva para explorar funciones. Algunas opciones populares incluyen Photomath, Mathway y Wolfram Alpha. Estas aplicaciones brindan soluciones paso a paso a problemas matemáticos, incluidos los relacionados con funciones.

1.7.2 Recursos didácticos

- **Ejemplos y ejercicios variados**: Proporciona a los estudiantes una amplia variedad de ejemplos y ejercicios que aborden diferentes tipos de funciones. Esto les permitirá comprender mejor los conceptos y practicar la aplicación de las propiedades de las funciones.
- **Juegos y actividades lúdicas**: Introduce juegos y actividades interactivas en el aula para hacer que el aprendizaje de las funciones sea más divertido y participativo. Por ejemplo, puedes utilizar juegos de cartas o tableros con desafíos relacionados con la identificación de funciones o la resolución de problemas de función.
- **Uso de manipulativos**: Emplea manipulativos físicos, como bloques de colores o fichas, para representar gráficamente funciones y realizar operaciones. Esto ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender mejor los conceptos abstractos.

- **Enseñanza basada en proyectos**: Propón proyectos en los que los estudiantes puedan aplicar los conceptos de funciones en situaciones de la vida real. Por ejemplo, pueden investigar cómo las funciones se utilizan en campos como la economía, la física o la biología, y presentar sus hallazgos de manera creativa.
- **Uso de recursos en línea**: Aprovecha los recursos en línea, como tutoriales en video, lecciones interactivas y actividades en línea, para complementar la enseñanza en el aula. Plataformas educativas como Khan Academy, MathisFun o Coursera ofrecen una amplia gama de recursos matemáticos.

CAPÍTULO II. LÍMITES Y CONTINUIDAD

2.0 Introducción al capítulo

En el estudio de las funciones reales, los límites y la continuidad son conceptos fundamentales que permiten describir el comportamiento de una función en un punto o en un intervalo. En este segundo capítulo, se explorarán los límites y la continuidad de las funciones reales, y se presentarán las propiedades y técnicas necesarias para calcularlos.

Se definirá el concepto de límite y explicará cómo se calcula. Además, discutirá las propiedades de los límites y estudiará los límites trigonométricos y los diferentes tipos de indeterminación. También, incluirá recursos tecnológicos y didácticos para facilitar la comprensión de estos conceptos y su aplicación en la resolución de problemas.

Además, se abordará el concepto de continuidad de una función real y se presentarán las propiedades y técnicas necesarias para identificar la continuidad y discontinuidad de una función en un punto o en un intervalo. Se discutirán las diferentes formas de discontinuidad y se describirán las propiedades importantes que se deben tener en cuenta al trabajar con funciones continuas. Los recursos tecnológicos y didácticos en esta sección ayudarán a los estudiantes a comprender mejor la continuidad y a aplicarla en la resolución de problemas.

Finalmente, se estudiarán los límites al infinito y se presentarán las técnicas necesarias para calcularlos. Se abordarán las diferentes formas de infinito y se discutirán las propiedades importantes que se deben tener en cuenta al trabajar con límites al infinito. Se incluirán ejercicios de cálculo de límites al infinito y recursos tecnológicos y didácticos para facilitar la comprensión de estos conceptos.

En resumen, este segundo capítulo proporcionará una introducción completa al mundo de los límites y la continuidad de las funciones reales. Los recursos tecnológicos y didácticos incluidos en este capítulo ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estos conceptos y a aplicarlos en la resolución de problemas. La comprensión de estos conceptos es fundamental para el estudio de temas más avanzados en la matemática superior y su aplicación en áreas como la física, la ingeniería y la economía.

2.1 Contribución a la formación de Competencias

Sobre la base del contenido tratado en este capítulo sobre límites y continuidad se pretende contribuir a la formación de competencias genéricas, matemáticas y digitales.

Competencias Genéricas:

Pensamiento Crítico: Los estudiantes pueden desarrollar habilidades de pensamiento crítico al analizar y evaluar el comportamiento de las funciones en diferentes puntos y situaciones. Esto implica la capacidad de razonar, hacer conexiones lógicas y tomar decisiones fundamentadas basadas en evidencia matemática.

Resolución de Problemas: El estudio de los límites y la continuidad implica la resolución de problemas matemáticos complejos. Los estudiantes aprenderán a plantear y resolver problemas relacionados con límites de funciones y continuidad, lo que desarrollará su capacidad para abordar desafíos, aplicar estrategias y encontrar soluciones adecuadas.

Comunicación Matemática: Al estudiar los límites y la continuidad, los estudiantes deben ser capaces de comunicar sus ideas matemáticas de manera clara y precisa. Esto incluye la capacidad de utilizar terminología matemática adecuada, representar gráficamente conceptos y explicar su razonamiento de manera coherente, ya sea de forma oral o escrita.

Competencias Matemáticas:

Comprensión de Funciones: Los estudiantes desarrollarán una comprensión profunda de las funciones reales y su comportamiento en relación con los límites. Podrán analizar y describir cómo las funciones se acercan o se alejan de ciertos valores, identificar puntos críticos y determinar si una función es continua o discontinua.

Cálculo de Límites: Los estudiantes aprenderán a calcular límites de funciones utilizando diferentes técnicas, como sustitución directa, factorización y uso de propiedades de límites. Esto incluye el cálculo de límites finitos, límites infinitos y límites al infinito.

Análisis de Continuidad: Los estudiantes comprenderán el concepto de continuidad de una función y serán capaces de identificar y analizar los diferentes tipos de discontinuidades. Podrán utilizar criterios y propiedades para determinar si una función es continua en un punto o en un intervalo.

Competencias Digitales:

Uso de Software Matemático: Los estudiantes podrán utilizar software matemático como GeoGebra, Mathematica o Maple para realizar cálculos simbólicos, trazar gráficos interactivos y explorar propiedades de las funciones relacionadas con límites y continuidad. Estas herramientas les permitirán visualizar y analizar de manera más eficiente los conceptos matemáticos.

Búsqueda y Evaluación de Información: Los estudiantes desarrollarán habilidades de búsqueda y evaluación de información en línea para encontrar recursos digitales relevantes sobre límites y continuidad. Podrán seleccionar fuentes confiables, extraer información relevante y utilizarla de manera efectiva para su aprendizaje.

Comunicación Digital: Al utilizar recursos tecnológicos, los estudiantes tendrán la oportunidad de comunicar y presentar sus resultados y conclusiones de manera digital. Esto puede incluir la creación de gráficos interactivos, la elaboración de informes escritos utilizando herramientas de procesamiento de texto, o la participación en discusiones en línea para compartir y debatir ideas matemáticas.

El desarrollo de estas competencias genéricas, matemáticas y digitales permitirá a los estudiantes adquirir competencias profesionales fundamentales que integren el pensamiento matemático, la resolución de problemas y la utilización efectiva de herramientas tecnológicas en el contexto de los límites y la continuidad de las funciones reales.

2.2 Límites

El estudio de los límites es de fundamental importancia en las matemáticas, especialmente en el campo del cálculo y el análisis matemático. Los límites son conceptos fundamentales para comprender y describir el comportamiento de funciones y secuencias en situaciones en las que los valores de entrada o salida se acercan a ciertos valores específicos.

Hay algunas razones por las que el estudio de los límites es importante:

- **Descripción del comportamiento de funciones**: los límites permiten describir cómo se comporta una función en puntos específicos. Ayudan a determinar si una función tiene un valor límite en un punto dado y si la función es continua o discontinua en ese punto. También permiten analizar el comportamiento de una función cuando la variable independiente se acerca a valores infinitos.
- **Cálculo diferencial**: los límites son esenciales para el cálculo diferencial, que es una rama importante del cálculo. La derivada de una función se define en términos de límites, específicamente como el límite de una razón de cambio cuando el cambio en la variable independiente se acerca a cero. Las derivadas son fundamentales para comprender la tasa de cambio de una función y son utilizadas en numerosas aplicaciones prácticas, como la física, la economía y la ingeniería (ver Capítulo 2).
- **Cálculo integral**: los límites también son esenciales en el cálculo integral. La integral definida de una función se calcula mediante la suma de infinitos valores infinitesimales, que se aproximan utilizando límites. El cálculo integral tiene aplicaciones en el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de curvas y muchas otras cantidades físicas y geométricas (ver Capítulo 2).
- **Análisis matemático**: los límites son una herramienta fundamental en el análisis matemático, que se ocupa del estudio riguroso de conceptos como convergencia, continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. Los teoremas y resultados en análisis

matemático a menudo se basan en propiedades y aplicaciones de propiedades de límites.

- **Modelado y predicción**: los límites también son útiles en el modelado matemático y la predicción de fenómenos. Al comprender cómo se comporta una función o secuencia a medida que sus variables se acercan a ciertos valores, se pueden hacer predicciones e inferencias sobre el comportamiento futuro.

2.2.1 Definición de límite

Aproximación a la definición informal de límite:

Supongamos que deseamos encontrar un valor que caracterice el comportamiento de una función $y = f(x)$ *alrededor* de un punto x_0 de su dominio. Obsérvese que hemos enfatizado la palabra *alrededor* porque obviamente si nos interesara el comportamiento de la función *solamente* en el punto x_0 bastaría con conocer su imagen $f(x_0)$. Sin embargo, en muchas ocasiones la función simplemente no está definida en x_0 o su valor no está en concordancia con los valores tomados por la función en los puntos cercanos a x_0.

Ejemplos

Para ilustrar lo anterior tomemos la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Es evidente que el domino de f es el conjunto de todos los reales a excepción de $x = 2$, por tanto, hablar del valor de la función en ese punto carece de sentido. Sin embargo, como se puede apreciar del propio gráfico (figura 32), cuando la x se aproxima al valor de 2 (sin llegar a tomar ese valor), los valores correspondientes de la imagen se *acercan al valor de 4*.

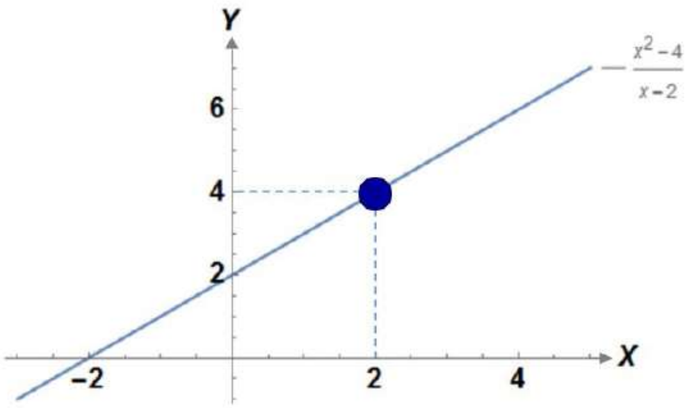


Figura 32. Representación geométrica del límite de una función en un punto no perteneciente a su dominio de definición.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Esto se explica fácilmente si tenemos en cuenta que para cualquier $x \neq 2$ la función $f(x)$ coincide con $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = x+2$. De aquí que parece lógico caracterizar el comportamiento de la función en los alrededores del punto $x = 2$ con el valor de 4.

Sea la $f(x) = \text{sign}(x)^2$ la cual se muestra en la figura 33. Note que la función sign(x) se define de la siguiente forma:

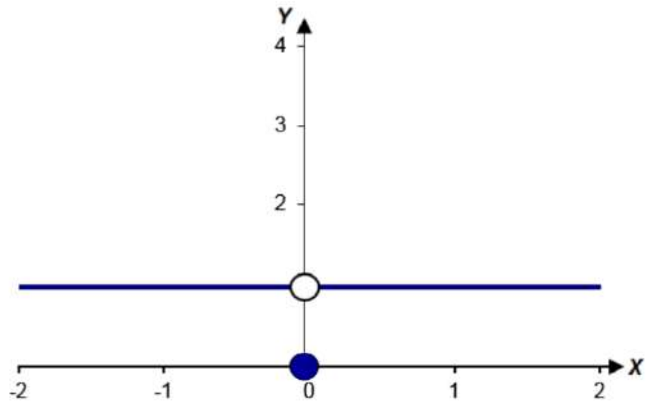


Figura 33. Representación geométrica del límite de una función en un punto

que no coincide con el valor de esta función en el punto.

La función $f(x)$ está definida en x_0, sin embargo, el valor que toma en ese punto no es representativo de lo que sucede en los alrededores del mismo. Entonces un simple cálculo muestra que la función $f(x)$ toma el valor de 1 para todos los reales a excepción del punto $x = 0$ donde toma el valor de cero (ver Figura 33). Es fácil ver que, aunque $f(0) = 0$, el valor que caracteriza la función en un entorno de 0 es el valor 1.

Todas estas contradicciones nos llevan a la necesidad de introducir un nuevo concepto: el concepto de límite.

Definición informal de límite

Sea $x_0 \in (a,b)$ y f una función definida en todo ese intervalo excepto posiblemente en x_0. Si la diferencia $|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera para todas las x suficientemente cercanas (pero desiguales) a x_0 entonces diremos que L es el límite de la función f cuando x tiende a x_0 y lo denotaremos por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

En muchos casos el límite de la función coincide simplemente con el valor de la función en el punto, existe una clase de funciones suficientemente amplia que cumple con ese criterio. Sin embargo, los ejemplos de las figuras 32 y 33 muestran que no siempre es así, más aún no siempre el límite existe. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Por la definición de módulo es fácil ver que $f(x)$ coincide con la función $\text{sign}(x)$ introducida anteriormente en todos los puntos a excepción de en cero donde obviamente no está definida.

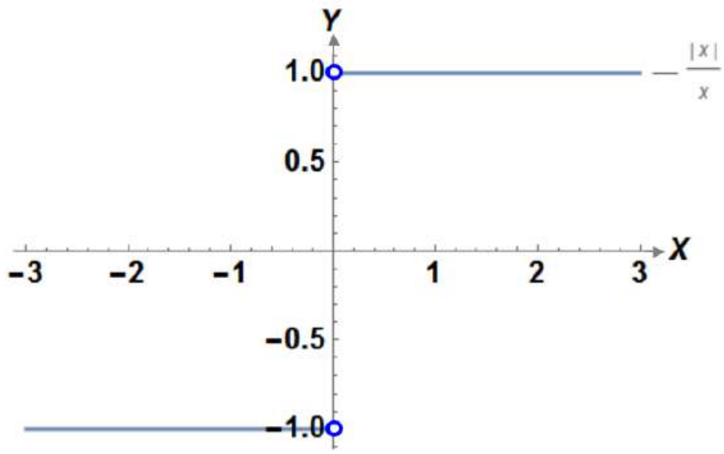


Figura 34. Representación geométrica de un punto de la abscisa que no pertenece al dominio de la función y donde no existe el límite.

Si analizáramos solamente los valores negativos de la x, observaríamos que cuando x se acerca suficientemente a cero las imágenes se acercan al valor de –1 (más exactamente son iguales a –1). Sin embargo –1 no puede ser el límite de la función en el punto $x_0 = 0$ por cuanto –1 "no está cercano" a los valores que toma la función a la derecha del punto $x_0 = 0$. Puede apreciarse que ningún valor satisface la definición dada anteriormente, por lo cual en ese punto la función no tiene límite. Sin embargo si limitáramos el análisis solamente a los puntos situados a la derecha de $x_0 = 0$ (o a la izquierda) es evidente que todas las imágenes se aproximan a –1 (correspondientemente a 1).

Esta observación anterior conduce al concepto de límite lateral.

Definición: Límite por la izquierda. Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, x_0). Si la diferencia $|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera para todas las x suficientemente cercanas (pero menores) a x_0 entonces diremos que L es el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la izquierda y lo denotaremos por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Definición: Límite por la derecha

Sea f una función definida en un intervalo abierto (x_0, b). Si la diferencia $|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera para todas las x suficientemente cercanas (pero mayores) a x_0 entonces diremos que L es el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la derecha y lo denotaremos por:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$$

Teorema: sea x_0 un punto contenido en un intervalo abierto (a,b) y f una función definida en un todo el intervalo, excepto posiblemente en x_0. Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$.

Es decir, el límite existe si y sólo si existen los límites laterales y estos son iguales. En el ejemplo de la figura 34 tenemos que:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 1$$

por lo que de acuerdo a este teorema el límite no existe, pues los límites laterales a pesar de existir no son iguales.

La definición informal de límite en términos de que una diferencia puede hacerse *tan pequeña como se quisiera* escogiendo a las x *suficientemente cercanas* partes de conceptos imprecisos por la vaguedad de las expresiones enfatizadas anteriormente. Decir que la diferencia $|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera significa que para todo $\varepsilon > 0$, puede encontrarse un intervalo que contenga a x_0 tal que para todos los puntos de ese intervalo (desiguales a x_0) tengamos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Este intervalo que contiene a x_0 podemos tomarlo con centro en el propio x_0. De esta manera obtenemos la siguiente definición exacta de límite:

Definición exacta de límite: Sea $x_0 \in (a,b)$ y f una función definida en todo ese intervalo excepto posiblemente en x_0. Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Observación: si f tiene límite cuando x tiende a x_0, entonces el límite es único.

En la figura 35 se representa geométricamente la definición exacta de límite para el punto x_0. Se tiene que la distancia entre cualquier $x \in (a,b)$ y x_0 es menor que δ (pues geométricamente el punto x está dentro de las bandas $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$), por lo tanto, según la definición, la distancia que hay entre f(x) y L es menor que ε ($|f(x) - L| < \varepsilon$), o sea, geométricamente f(x) cae dentro de las bandas $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$.

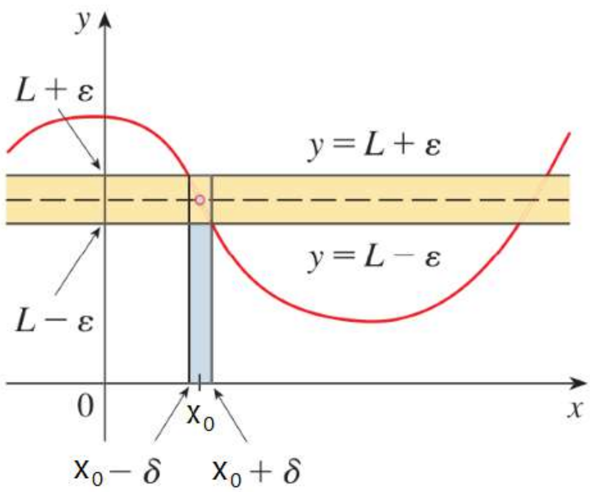


Figura 35. Representación geométrica de la definición de límite.

2.2.2 *Límites en el infinito*

En este punto consideraremos funciones cuyos valores se estabilizan cuando $|x|$ se hace muy grande y también funciones tales que $|f(x)|$ pueden tomar valores arbitrariamente grandes cuando x tiende a un punto x_0. Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Analizar el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a infinito.

Solución:

En la figura 36 se muestra la gráfica de la función.

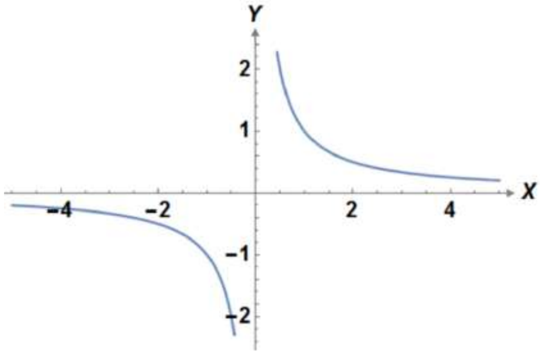


Figura 36. Comportamiento de la función cuando tiende a infinito.

Estudiemos los valores de $f(x)$ para valores grandes y positivos de x. Por ejemplo:

$$f(10) = 0,1$$
$$f(100) = 0,01$$
$$f(1000) = 0,001$$

Evidentemente puede lograrse que $f(x)$ se acerque a 0 tanto como se quiera o, equivalentemente que $|f(x)-0|$ sea arbitrariamente pequeño. Este comportamiento de $f(x)$ se expresa por $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$ Es importante recordar que no se puede sustituir nunca la variable x por infinito puesto que éste no es un número real. Entonces la expresión x tiende a ∞ no significa que la variable x tienda o se acerque a algún número real determinado, sino que x crece indefinidamente.

La definición formal de lo que acabamos de enunciar respecto al límite en el infinito se presenta a continuación:

Definición de límite en el Infinito: Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que siempre que $x > N$ se cumple $|f(x)-L| < \varepsilon$ decimos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

De igual modo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número negativo N tal que siempre que $x < N$ se cumple $|f(x)-L| < \varepsilon$ decimos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Pueden obtenerse consecuencias análogas a las enumeradas para los límites en un punto. En tal sentido, el siguiente teorema es importante para el cálculo de límites específicos.

Teorema

Sea $k \in \mathbb{R}$ un número positivo y $c \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario. Entonces:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ siempre y cuando x^k esté definido.

De este teorema se desprende que si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, y el grado del polinomio $Q(x)$ es mayor o igual que el de $P(x)$ entonces dividiendo el numerador y el denominador por x^k donde k es el grado $Q(x)$ y aplicando este teorema podemos obtener fácilmente el límite en el infinito.

Ejemplo

Analizar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2}$

Como sólo interesan en este caso los valores positivos de x podemos suponer que $x \neq 0$. Dividiendo entonces por x^2 el numerador y el denominador obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^2 + x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 5/x^2}{3 + 1/x + 2/x^2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} 5/x^2}{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} 1/x + \lim\limits_{x \to +\infty} 2/x^2} = \frac{2 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}$$

Es posible demostrar que si el grado del numerador de una función racional es mayor que el grado del denominador el límite en el infinito no existe.

Veamos ahora la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. La gráfica de f está en la figura 37.

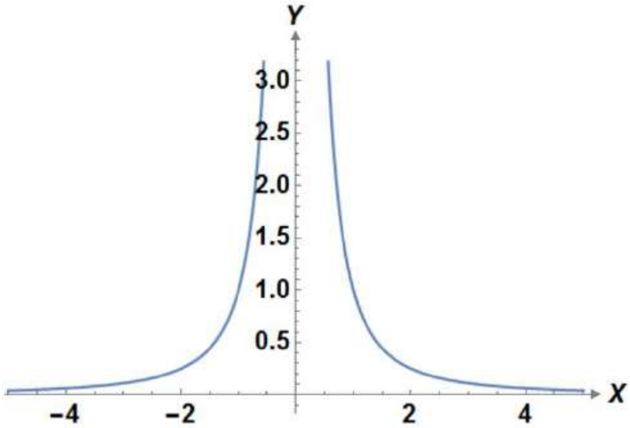


Figura 37. Crecimiento ilimitado de la función cuando tiende a al punto x = 0.

Si x se acerca a cero (pero $x \neq 0$), el denominador x^2 se acerca a cero y por tanto $f(x) = \frac{1}{x^2}$ toma valores muy grandes. Por ejemplo:

$$f(0{,}1) = 100$$
$$f(0{,}01) = 10000$$
$$f(0{,}001) = 100000$$

Evidentemente podemos lograr que $f(x)$ tome valores tan grandes como queramos escogiendo a x suficientemente cercano a 0. Esto se expresa simbólicamente así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Definición de límites infinitos: sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, excepto posiblemente en x_0. La afirmación: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $+\infty$, que se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ significa que

$\forall \; M > 0, \; \exists \; \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

De manera análoga la afirmación: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $-\infty$, que se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ significa que

$\forall M < 0, \; \exists \; \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < M$.

El siguiente teorema es útil para describir el comportamiento de las funciones racionales.

Teorema 2.3

Si n es un número entero positivo par y $c \in \mathbb{R}$ un número real positivo. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c}{(x - x_0)^n} = +\infty$$

Si n es un número entero positivo impar y $c \in \mathbb{R}$ un número real positivo. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{c}{(x - x_0)^n} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{c}{(x - x_0)^n} = -\infty$$

2.2.3 *Propiedades de los límites y tipos de indeterminación*

Aunque pueden calcularse algunos límites aplicando directamente la definición, esta es una tarea que en general es bastante engorrosa, por lo que procederemos a ver los métodos para el cálculo de límites que se derivan de la definición y que son útiles aplicarlas combinadas con teoremas de los presentados para el cálculo de límites de funciones.

Propiedades para el cálculo de límites cuando tienden a un punto dado:

1. Límite de una función constante: Si f es una función constante, o sea $f(x) = k$ entonces $\lim_{x \to c} k = k$ para todo número real arbitrario c. Es decir, el límite de una constante es la propia constante.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

2. Límite de la función identidad: El límite de la función identidad en cuando x tiende a un punto dado c es igual a c, o sea, $\lim_{x \to c} x = c$. Esta propiedad es una consecuencia directa (y trivial) de la definición.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

3. Límite del producto por una constante: Si existe el límite de la función f(x) cuando x tiende a un punto dado c y k es un número real arbitrario, entonces el límite de la función $k * f(x) = \lim_{x \to c} [k * f(x)] = k * f(x)$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}[\pi * \frac{x^2+1}{x+1}] = \lim_{x\to 0}\pi * \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1} = \pi * 1 = \pi$$

4. Límite de la suma y la resta: Si los límites individuales de dos funciones f(x) y g(x) existen cuando x tiende a un punto dado c, entonces el límite de la suma de estas funciones también existe y se puede calcular como la suma de los límites individuales. En términos matemáticos:

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x$ calcula el límite de h(x) cuando x tiende a 2 si se conoce que $h(x) = f(x) + g(x)$.

Solución:

$$\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 + 3) + \lim_{x\to 2} 2x =$$

$$= 2^2 + 3 + 2 * 2 = 7 + 4 = 11$$

5. Límite del producto: Si los límites individuales de dos funciones f(x) y g(x) existen cuando x tiende a un punto dado c, entonces el límite del producto de estas funciones también existe y se puede calcular como el producto de los límites individuales. En términos matemáticos:

$$\lim_{x\to c}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) * \lim_{x\to c} g(x)$$

Ejemplo

Calcula el límite de la función $h(x) = f(x) * g(x)$ cuando x tiende a 3, si se conoce que $f(x) = x^2$ y que $g(x) = e^x$.

Solución:

$$\lim_{x\to 3}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to 3} f(x) * \lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}(x^2) * \lim_{x\to 3} e^x =$$

$$3^2 * e^3 = 9 * e^3 \approx 20.0855$$

6. Límite del cociente: Si los límites individuales de las funciones f(x) y g(x) existen cuando x tiende a un punto dado c, y el límite de la función g(x) no es igual a cero, entonces el límite del cociente de estas funciones también existe y se puede calcular como el cociente de los límites individuales. En términos matemáticos:

$$\lim_{x \to c}[f(x)/\, g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \,/\, \lim_{x \to c} g(x)$$

Ejemplo

Calcular el límite de la función h(x) = f(x) / g(x) cuando x tiende a 1, si se conoce que $f(x) = x^2+1$ y que g(x) = x + 1.

Solución:

$$\lim_{x \to 1}[f(x)/\, g(x)] = \lim_{x \to 1} f(x) \,/\, \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1}(x^2+1) \;/\; \lim_{x \to 1}(x+1) =$$

$$=1^2 + 1 + 1 + 1 = 4$$

A continuación, el siguiente teorema enuncia algunas propiedades de las sumas, productos y cocientes de las funciones que tienden a infinito.

Teorema:

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c$ para algún número $c \in \mathbb{R}$, entonces :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$
2. Si $c > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) * g(x)] = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0} [\frac{f(x)}{g(x)}] = +\infty$
3. Si $c < 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) * g(x)] = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0} [\frac{f(x)}{g(x)}] = -\infty$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Ejemplo

Calcular: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x+7}{x-5}$

El numerador y el denominador son funciones lineales cuyos límites siempre existen y se obtienen (de acuerdo a la consecuencia 4) simplemente evaluando. Si verificamos el límite del numerador obtenemos que este es diferente de cero por lo que podemos aplicar la propiedad 3c y obtenemos:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x+7}{x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(2x+7)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-5)}=\frac{2(4)+7}{4-5}= \quad 15.$$

Desde el teorema anterior pueden obtenerse las siguientes propiedades:

Propiedades para el cálculo de límites:

1. $\forall n\in \mathbb{Z}$ y $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ tenemos $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$
2. Si f es un Polinomio entonces: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. Si f es una función racional, o sea un cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ entre polinomios entonces:

   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ si $x_0 \in \text{Dom}(f)$.
4. Esta última propiedad expresa que si el denominador de una función racional no se anula en el punto entonces el límite simplemente calculado hallando el valor de la función en el punto.

Ejemplos

- Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^n$

Como el denominador no se anula en el punto $x=2$ podemos simplemente evaluar de donde obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-\ 1}{x-1}=\frac{2^3-1}{2-1}=\frac{8-1}{1}=7$$

- Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

Como el denominador se anula en el punto $x = 1$ no podemos obtener el límite por evaluación porque obtenemos una indeterminación del tipo 0/0, pues el numerador también se anula en $x = 1$. De ahí que sea lógica la idea de factorizar para simplificar el término $x - 1$. En efecto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1$$

5. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ y $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$ se cumple $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

6. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, n impar y $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

Ejemplo

Calcular: $\lim_{x\to 8}\dfrac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)}$

Procederemos como sigue:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3} + 3\sqrt{x}}{4 - (16/x)} = \frac{\lim_{x\to 8}(x^{2/3} + 3\sqrt{x})}{\lim_{x\to 8}[4 - (16/x)]} = \frac{\lim_{x\to 8} x^{2/3} + \lim_{x\to 8} 3\sqrt{x}}{\lim_{x\to 8} 4 - \lim_{x\to 8}(16/x)} = \frac{8^{2/3} + 3\sqrt{8}}{4 - (16/8)} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{2} = 2 + 3\sqrt{2}$$

7. Si una función tiene límite cuando x tiende a x_0 entonces:

$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x_0)}$, siempre y cuando n sea un entero positivo impar o bien n sea un entero positivo y $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$.

El concepto de indeterminación en el cálculo de límites de funciones se puede detectar al estudiar las propiedades aritméticas de estos límites. Así, se observa que, al operar algebraicamente con funciones convergentes (sumándolas, multiplicándolas, dividiéndolas, extrayendo logaritmos o elevando una a otra) se suelen obtener funciones que también son convergentes, y cuyos límites se pueden calcular a partir de los de aquéllas. Sin embargo, esto no siempre es así, existen casos en los que no son de aplicación las citadas propiedades, y el posible límite (el de la función que resulta al operar con ciertas funciones dadas) no depende sólo de los valores que tomen los límites de éstas, sino que varía de unos casos a otros, pudiendo, incluso, no existir.

Estos son los casos a los que llamaremos "límites indeterminados" o "casos de indeterminación". Los tipos de indeterminación existentes en el cálculo de límites de funciones de una variable real son los que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Tipos de indeterminación presentadas en el cálculo de límites de funciones.

Tipos de Indeterminación	**Ejemplo**
∞ / ∞	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2}{x^3+x}$
$0/0$	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4+1}{5}$
0^0	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{x^4}}$
∞^0	$\lim_{x\to\infty} (x^3)^{\frac{1}{x^4}}$
1^∞	$\lim_{x\to 0} (1-x^2)^{\frac{1}{x}}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

2.2.4 *Límites notables*

- **Límite fundamental algebraico**

El número "e" que sirve de base al logaritmo natural o neperiano puede definirse directamente por el siguiente límite

$$e = \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x$$

el cual recibe el nombre de *límite fundamental algebraico*.

Este límite también puede escribirse como

$$e = \lim_{a \to 0} (1 + a)^{\frac{1}{a}}$$

Obsérvese que al evaluar este límite se llega al valor 1^{∞}, o sea, una indeterminación.

El número e es el límite de cualquier expresión que pueda ser llevada a una de las dos formas anteriores. En general, cualquier expresión que pueda ser llevada a la forma $(1 + \frac{1}{Y})^{Y}$ con Y tendiendo a ∞ , tiene como límite el valor e.

Ejemplo:

Al evaluar los siguientes límites se llega a la indeterminación 1^{∞}, es por ello que se utiliza como estrategia realizar transformaciones para utilizar el límite fundamental algebraico.

1. Hallar el siguiente límite: $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}} = \lim_{Y \to \infty} (1 + \frac{1}{Y})^{Y} = e$$

ya que haciendo Y = x/2 se tiene que cuando $x \to \infty$, también $Y \to \infty$.

- **Límite fundamental trigonométrico**

Sea la función definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \neq 0$. Suponga que se quiere calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Si se aplican directamente las reglas para el cálculo de límites se obtiene la indeterminación de la forma 0/0, que como se vio arriba. Sin embargo, es posible demostrar que (Stewart, 2008, pp. 190-191)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

recibiendo este, el nombre de *límite fundamental trigonométrico*. Su importancia estriba en que con su utilización es posible el cálculo de otros límites.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites aplicando la definición del límite fundamental trigonométrico:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} * \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} * \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 * 1 = 1$$

- **Tercer límite fundamental**

El cálculo de este límite es importante para la realización de cálculos que se realizarán ulteriormente.

Por definición $a = e^{\ln a}$, $a > 0$. Luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x}$$

Si se hace la sustitución $e^{x \ln a} = 1 + a$ (puesto que cuando $x \to 0$ entonces $a \to 0$) y se aplica logaritmo natural, esta relación se convierte en

$$\ln e^{x \ln a} = \ln (1 + a)$$

$$x \ln a * \ln e = \ln (1 + a)$$

$$x \ \ln a = \ln (1 + a)$$

$$x = \frac{\ln (1 + a)}{\ln a}$$

Por tanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \lim_{a \to 0} \frac{1 + a - 1}{\frac{\ln (1 + a)}{\ln a}} = \lim_{a \to 0} \frac{a}{\frac{\ln (1 + a)}{\ln a}}$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{a}\ln(1+a)} = \lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+a)^{\frac{1}{a}}} = \frac{\lim\limits_{a\to 0}\ln a}{\lim\limits_{a\to 0}\ln(1+a)^{\frac{1}{a}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$$

Por ser a $\neq$ 0 y ln a $\neq$ 0, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

Cuando a = e resulta que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$

Ejemplo

- Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\sqrt[x]{a}-1)$, a > 0

Solución:

Por propiedades de los límites

$$\lim_{x\to\infty} x * \lim_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} x * (\lim_{x\to\infty} a^{\lim\limits_{\to\infty}\frac{1}{x}} - \lim_{x\to\infty} 1)$$

Si se pasara al límite en esta situación se tendría $\infty.0$ lo que conduce a una indeterminación.

$$\lim_{x\to\infty} x\,(a^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \ln a$$

2.3 Continuidad de una función real

El análisis de la continuidad de una función real es de gran importancia en matemáticas porque proporciona información fundamental sobre el comportamiento de la función en su dominio. La continuidad de una función implica que no hay agujeros, saltos, quiebres o discontinuidades bruscas en su gráfica. Una función continua puede ser trazada sin levantar el lápiz, lo que significa que no tiene puntos de quiebre repentinos o agujeros en su gráfica.

Algunas razones importantes por las que el análisis de la continuidad es relevante son las siguientes:

Comportamiento local: La continuidad permite estudiar cómo se comporta una función en un punto específico y en su entorno inmediato. Proporciona información sobre si la función está bien definida y si se puede evaluar en ese punto.

Existencia de soluciones: La continuidad es una condición necesaria para la existencia de soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Si una función es continua en un intervalo y se cumple un teorema de existencia, podemos garantizar que se encontrará al menos una solución en ese intervalo.

Propiedades de las operaciones: Las operaciones algebraicas básicas (suma, resta, multiplicación y división) preservan la continuidad de las funciones. Esto significa que si dos funciones son continuas, su suma, resta, producto y cociente (cuando el denominador no sea cero) también serán continuas.

Teorema del valor intermedio: La continuidad es esencial para aplicar el teorema del valor intermedio, que establece que si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces toma todos los valores intermedios entre el valor de la función en los extremos del intervalo. Este teorema es útil para probar la existencia de soluciones de ecuaciones y para demostrar propiedades de las funciones.

Teorema del valor extremo: La continuidad asegura que una función definida en un intervalo cerrado alcanzará un máximo y un mínimo absoluto en ese intervalo. Este resultado, conocido como teorema del valor extremo, es importante para optimización y problemas de máximo y mínimo.

En resumen, el análisis de la continuidad de una función real es fundamental para comprender su comportamiento, establecer la existencia de soluciones, aplicar teoremas relevantes y demostrar propiedades importantes. Proporciona una base sólida para el estudio y la aplicación de las matemáticas en diversos campos.

La figura 38 ilustra cuatro comportamientos típicos de las funciones de una variable real.

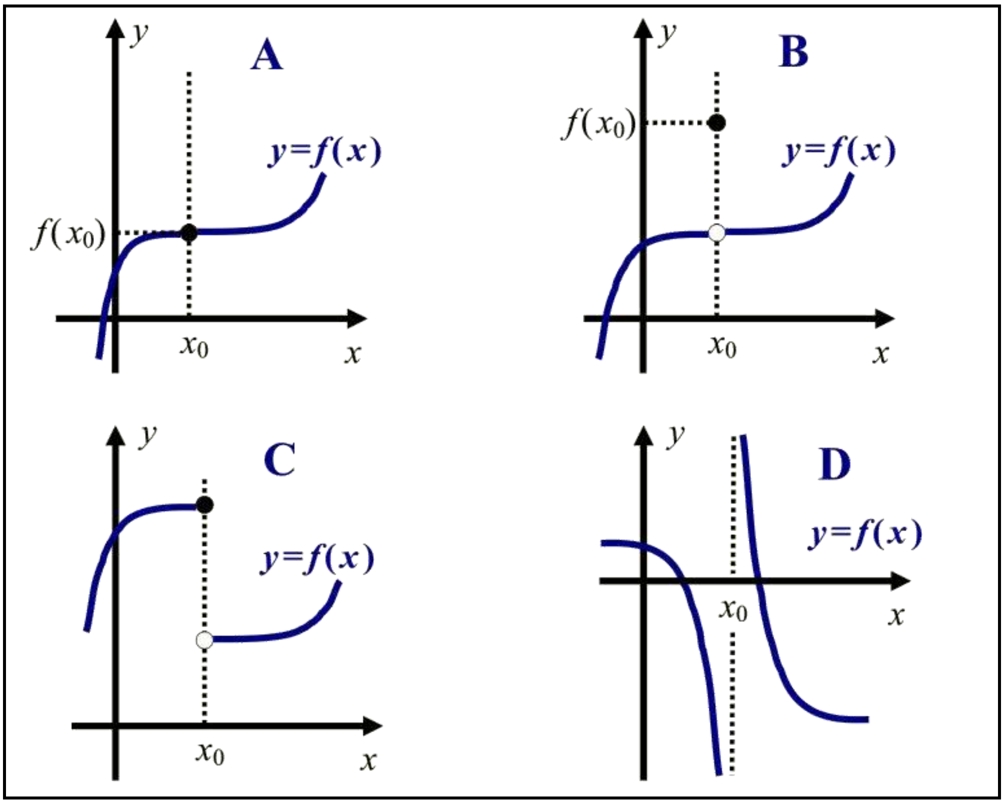


Figura 38. Cuatro comportamientos típicos de las funciones de una variable real.

Gráfico	Característica esencial que distingue el comportamiento que se ilustra
A	La función está definida en el punto x_0 y existe el límite cuando x tiende a x_0 y es igual a $f(x_0)$, que es el valor que toma la función al ser evaluada en este punto; es decir, se cumple la condición $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
B	La función está definida en el punto x_0 y existe el límite cuando x tiende a x_0, pero no es igual a $f(x_0)$, que es el valor que la función toma al ser evaluada en este punto; es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
C	No existe el límite de la función cuando x tiende a x_0, por ser desiguales los límites laterales; que existen (son finitos); es decir, $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$
D	Es infinito el límite de la función cuando x tiende a x_0, es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Función continua en un punto

Definición de continuidad:

Una función f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. f está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0.
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y es finito.
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Una función f es continua cuando es continua en todos sus puntos del dominio.

La verificación del hecho de que una función dada sea continua en un determinado punto x_0 tiene que basarse en comprobar las tres condiciones de la definición de continuidad (ver gráfico A de la figura 38):

Cuando para una función dada y un determinado punto o número x_0, se incumple por lo menos una de las tres condiciones anteriores, la función recibe el nombre de discontinua en ese punto. Las funciones que se presentan en los gráficos B, C y D de la figura 38 son todas discontinuas en el punto x_0. Ellas ilustran algunas de las causas que con más frecuencia provocan que una función deje de ser continua:

- **Función con una discontinuidad evitable en un punto**

  El hecho esencial que se ilustra en el gráfico B es que esa función tiene límite cuando x tiende a x_0. La función representada es discontinua por no cumplirse la condición 3. Si una función es discontinua en un determinado número o punto x_0, pero tiene límite cuando x tiende a x_0, entonces esta discontinuidad recibe el nombre de evitable.

- **Función con una discontinuidad no evitable en un punto**

  Los gráficos C y D ilustran discontinuidades no evitables, lo que está determinado porque tanto en una como en otra no existe el límite. En C el límite no existe por ser desiguales los límites laterales, aunque ambos son finitos. De esta discontinuidad no evitable se dice que es de salto, que es la diferencia entre los límites laterales. En D el límite es infinito, porque ambos límites laterales lo son. A esta discontinuidad no evitable se le llama infinita. Para tener una discontinuidad no evitable infinita basta con que uno de los límites laterales sea infinito.

Teorema

1. Si g es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ y f es continua en $g(x_0) \in \mathbb{R}$ entonces $f \circ g$ es contínua en $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Si f es contínua en $x_0 \in \mathbb{R}$ y estrictamente monótona en algún intervalo abierto que contiene a x_0 entonces existe una función inversa definida sobre el intervalo $< f(a), f(b) >$, igualmente continua y estrictamente monótona.

Una consecuencia directa de este teorema es la siguiente proposición:

Teorema

Si g es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ y f es continua en $g(x_0) \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Entonces, respecto a la continuidad de las funciones elementales el siguiente teorema asegura la continuidad de las funciones potencial, exponencial y seno.

Teorema

1. La función potencial $f(x) = x^n$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. La función exponencial $f(x) = a^x$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. La función trigonométrica $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

De este teorema y del anterior se desprende que sus correspondientes funciones inversas también son continuas. Por lo tanto, la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y la función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ son continuas en cada punto del intervalo $(0, \infty)$ A su vez, la función $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ es continua al menos en cada punto del intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ donde, como es fácil ver, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es monótona.

También de aquí se desprende que la función $f(x) = \cos x$ es continua todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$. En efecto basta tomar en cuenta la relación $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$. Así podemos proseguir con otros casos. En general llamaremos función elemental a una función que pueda expresarse como el resultado de un número finito de sumas, productos, cocientes y composiciones entre las funciones del Teorema anterior y sus inversas. Es posible demostrar que toda función elemental es continua en cada punto de su dominio.

A continuación, se presentan teoremas fundamentales sobre las funciones continuas, los cuales tienen una relevante aplicación en la matemática superior.

Teorema (Teorema del Valor Medio) (de Cauchy)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = w$

Teorema (de Bolzano-Cauchy)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y $f(a) * f(b) < 0$, entonces existe al menos un número $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

La condición $f(a) * f(b) < 0$ simplemente indica que los valores de la función en los extremos toman valores de signos contrarios. La equivalencia del Teorema del valor medio con el Teorema de Bolzano-Cauchy es obvia.

En efecto, si partimos de la validez del Teorema del valor medio, se cumple que $f(a) * f(b) < 0$ entonces $w = 0$ es un número entre $f(a)$ y $f(b)$ y, por tanto, existe al menos un número $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$. A la inversa, si suponemos el Teorema de Bolzano-Cauchy válido, w es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, el Teorema del valor medio se demuestra fácilmente introduciendo la función auxiliar $g(x) = f(x) - w$ que obviamente es continua y toma valores de signos contrarios en los extremos del intervalo. Existiría por tanto un número $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = 0 = f(c) - w$ o sea $f(c) = w$.

Geométricamente este teorema significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje de las x y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto (ver figura 39).

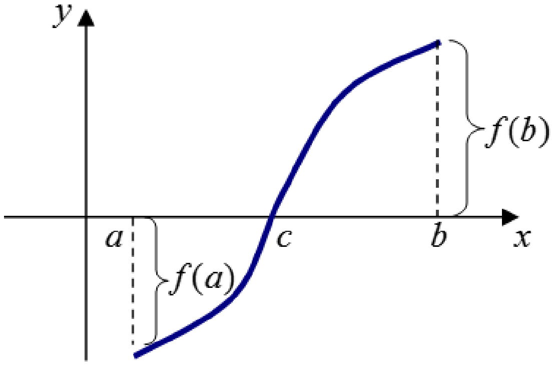


Figura 39. Gráfica de una función continua que se intersecta con el eje x.

La continuidad de la función f es necesaria y esencial; la función que tiene discontinuidad, al menos en un punto, puede pasar del valor negativo al positivo sin anularse. Lo cual se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Esta función tiene dominio de definición en el intervalo [-1, 1]. Sin embargo, la imagen es discreta, está compuesta por los puntos 1 y -1. Esta función no es continua por lo que pasa del valor negativo al positivo sin anularse.

El teorema Teorema de Bolzano-Cauchy puede usarse no sólo para establecer la existencia de la raíz sino también para su cálculo aproximado aplicando el método de la bisección. En efecto, consideremos el polinomio $P(x) = x^3 + x - 1$, tenemos que $P(0) = -1 < 0$, $P(1) = 1 > 0$, o sea, en los extremos del segmento $[0,1]$ el polinomio $P(x)$ toma valores de signos diferentes. Por consiguiente, de acuerdo al Teorema de Bolzano-Cauchy, en el intervalo $(0,1)$ existe al menos una raíz del polinomio. Si tomamos el punto $\xi = \frac{1}{2}$ que es el punto medio del segmento $[0,1]$ obtenemos $P(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0$. Por lo tanto, al menos una raíz se halla en el intervalo $(\frac{1}{2},1)$ ya que en los extremos de ese intervalo la función cambia de signo. Tomemos ahora $\xi_1 = \frac{3}{4}$ que es el punto medio del segmento $[\frac{1}{2},1]$. Tendremos $P(\frac{3}{4}) = \frac{11}{64} > 0$ lo que unido a $P(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0$ nos demuestra que existe una raíz en $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$.

Siguiendo ese proceso podemos hallar límites más y más estrechos para la raíz del polinomio $P(x)$. Como en cada paso del proceso dividimos el intervalo a la mitad este método se denomina el *método de la bisección.*

Teorema (Primer teorema de Weierstrass)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces ella es acotada en ese segmento, o sea, existe un número $K>0$ tal que para todos los $x\in[a,b]$ es válida la desigualdad: $|f(x)|\leq K$

Observación: Si la función f es continua en el intervalo (a,b), en el semintervalo $(a,b]$ o $[a,b)$, entonces no es obligatorio que f sea acotada en él. Por ejemplo la función $f(x)=1/x$ es continua en el semintervalo $(0,1]$ pero no es acotada en él.

Teorema (Segundo teorema de Weierstrass)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces en este segmento f alcanza sus cotas exactas, superior e inferior, es decir, en el segmento $[a,b]$ se encuentran puntos α y β tales que: $f(\alpha)\leq f(x)$ y $f(\beta)\geq f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Es evidente que para el segundo teorema de Weierstrass es esencial la continuidad en el segmento $[a,b]$. Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

El gráfico de la siguiente función está representada en la figura 40:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=-1\\ x, & x\in(-1,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

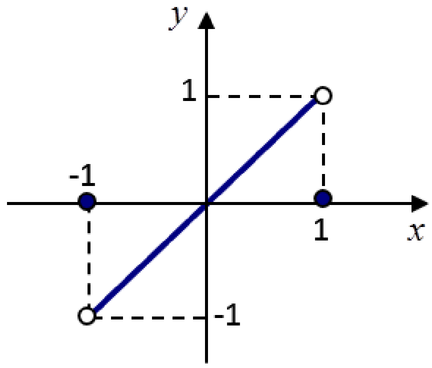


Figura 40. Función no continua en los extremos del intervalo cerrado [-1, 1].

La función f es continua en (-1,1) aunque discontinua en los extremos de ese intervalo. Es evidente que f no alcanza sus cotas exactas ya que, en efecto, la cota superior mínima es igual a 1 y la cota inferior máxima es igual a -1 y ninguno de estos valores es tomado por la función.

2.4 Ejercicios del capítulo

En esta sección los estudiantes deben poner en práctica sus conocimientos y desarrollar sus habilidades para comprender los ejercicios y problemas que se presentan, así como para resolver aquellos que se les proponen.

2.4.1 Ejercicios resueltos

1. Calcula el límite de la función $f(x) = (3x^2 - 5x + 2) / (x - 1)$ cuando x tiende a 1.

Solución:

Se verifica la indeterminación del tipo 0/0

Aplicando la factorización del numerador, tenemos:

$$f(x) = \frac{(3x - 2)(x - 1)}{(x - 1)}$$

Cancelando el factor común $(x – 1)$, obtenemos que $f(x) = 3x – 2$

Sustituyendo $x = 1$, obtenemos:

$$\lim_{n\to 1}(3x - 2) = 3(1) - 2 = 1$$

2. Calcule el límite de la función $\frac{x-1}{x^3-1}$ cuando x tiende a 1.

Solución:

Se verifica la indeterminación del tipo 0/0

Entonces, se puede descomponer directamente el numerador y simplificar con el denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}$$

3. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

Solución:

Si se pasa al límite directamente se tiene una forma indeterminada 0/0, sin embargo, realizando las siguientes operaciones.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x(e^x - 1)}{x e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} * \frac{1}{e^x} * \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} * \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} * \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = (\ln e) * (1) * (1) = 1$$

4. Calcula el límite de la función g(x) = $(2x^3 - 5x^2 + 2x) / (x^2 - 4)$ cuando x tiende a 2.

Solución:

Se verifica la indeterminación del tipo 0/0

Aplicando la factorización del numerador y del denominador, tenemos:

$$g(x) = \frac{x(2x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

Cancelando el factor común (x - 2), obtenemos:

$$g(x) = \frac{x(2x - 1)}{(x + 2)}$$

Sustituyendo x = 2, obtenemos:

$$\lim_{n \to 2} \frac{x(2x - 1)}{(x + 2)} = \frac{3(2 * 2 - 1)}{2 + 2} = \frac{3 * 3}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

5. Hallar el siguiente límite: $\lim_{z \to \infty} (1 + \frac{1}{z})^{3z}$

Solución:

A aplicar el *límite fundamental algebraico* se obtiene que:

$$\lim_{z \to \infty} (1 + \frac{1}{z})^{3z} = \lim_{z \to \infty} [(1 + \frac{1}{z})^z]^3 = [\lim_{z \to \infty} (1 + \frac{1}{z})^z]^3 = e^3$$

6. Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{w \to 0} \frac{w}{\text{sen}w}$

Solución:

Aplicando el *límite fundamental trigonométrico* se obtiene:

$$\lim_{w \to 0} \frac{w}{\text{sen}w} = \lim_{w \to 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}w}{w}} = \frac{\lim\limits_{w \to 0} 1}{\lim\limits_{w \to 0} \frac{\text{sen}w}{w}} = \frac{1}{1} = 1$$

7. Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{v \to 0} \frac{\text{sen}2v}{v}$

Solución:

Aplicando el *límite fundamental trigonométrico* se obtiene:

$$\lim_{v \to 0} \frac{\text{sen}2v}{v} = \lim_{v \to 0} \frac{2\text{sen}2v}{2v} = \lim_{v \to 0} 2 * \lim_{v \to 0} \frac{\text{sen}2v}{2v} = 2 * 1 = 2$$

8. Analice la continuidad de la siguiente función $y = \frac{1}{x}$

Solución:

La función $y = \frac{1}{x}$ se muestra gráficamente en la figura 41.

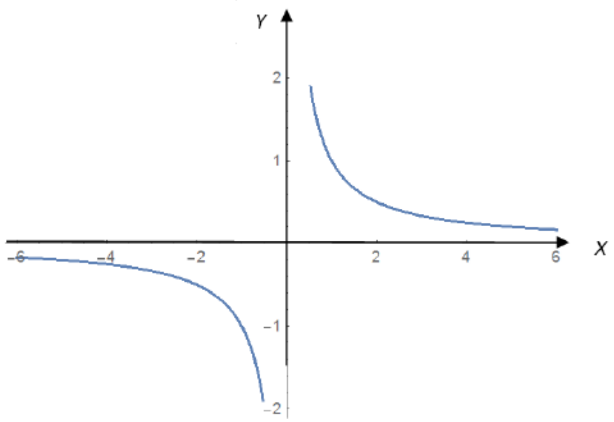


Figura 41. Representación geométrica de la función $y = \frac{1}{x}$

Sea $a \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

Luego, $f(x)$ es continua en $a \neq 0 \Rightarrow \forall x \neq 0$ $f(x)$ es continua.

Sea $x = 0$ entonces $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Luego, $f(x)$ no tiene límite en $x = 0$ y por lo tanto no es continua en este punto.

Se concluye que $f(x)$ es continua $\forall x \neq 0$ y discontinua en x = 0.

9. Analice la continuidad de la función $y = \frac{1}{x-1}$.

Solución:

La función $y = \frac{1}{x-1}$ se muestra gráficamente en la figura 42.

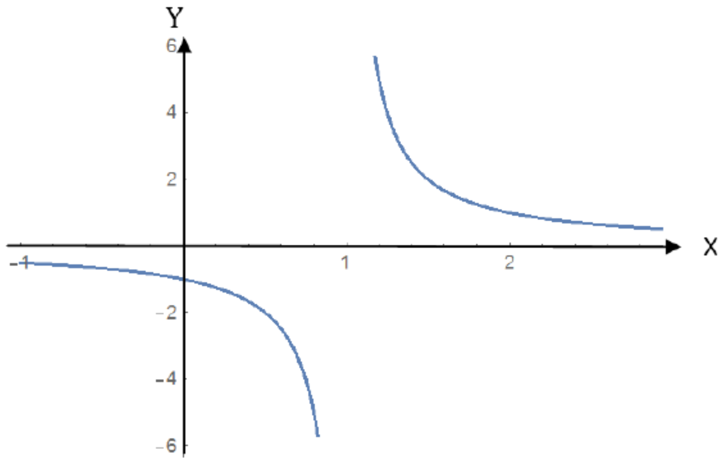


Figura 41. Representación geométrica de la función $y = \frac{1}{x-1}$

Sea $a \neq 1$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{a-1}$

Luego, $f(x)$ es continua en $a \neq 1 \Rightarrow \forall x \neq 1$ $f(x)$ es continua.

Sea $x = 1$ entonces $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x} = \infty$

Luego, $f(x)$ no tiene límite en $x = 1$ y por lo tanto no es continua en este punto.

Se concluye que $f(x)$ es continua $\forall x \neq 1$ y discontinua en $x = 1$

2.4.2 Ejercicios propuestos

1. Analiza la continuidad de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en todo su dominio.

2. Hallar el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^x$

3. Hallar el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$

4. Calcule el siguiente límite: $\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen}2v}{v}$

5. Analice la continuidad de la siguiente función $y = \frac{1}{x-1}$

6. Analice la continuidad de la siguiente función $y = \frac{x-1}{x}$

2.5 Recursos tecnológicos y didácticos

A continuación, se presentan algunos recursos tecnológicos y didácticos que pueden ser útiles tanto para estudiantes como para profesores al estudiar y enseñar el contenido de límite y continuidad. Estos recursos pueden ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos y facilitar la resolución de problemas.

2.5.1 Recursos tecnológicos

Calculadoras gráficas: Las calculadoras gráficas pueden ser herramientas poderosas para visualizar gráficamente las funciones y explorar su comportamiento cerca de ciertos puntos. Estas calculadoras permiten trazar gráficos, encontrar puntos críticos, calcular límites y analizar la continuidad de una función.

Software de matemáticas: Hay varios programas de software de matemáticas, como Mathematica, Maple y GeoGebra, que ofrecen funciones avanzadas para el cálculo de límites y el análisis de la continuidad. Estos programas permiten realizar cálculos simbólicos, trazar gráficos interactivos, resolver ecuaciones y explorar propiedades de las funciones.

Aplicaciones móviles: Existen aplicaciones móviles específicas para el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de funciones. Algunas aplicaciones populares incluyen Limit Calculator, Calculus Toolkit y Wolfram Alpha. Estas aplicaciones brindan soluciones paso a paso, gráficos interactivos y ejercicios prácticos para mejorar la comprensión de los conceptos.

Plataformas en línea: Hay plataformas educativas en línea, como Khan Academy y Coursera, que ofrecen cursos y recursos interactivos sobre cálculo y matemáticas avanzadas. Estas plataformas proporcionan lecciones, ejercicios, videos explicativos y evaluaciones para ayudar a los estudiantes a aprender y practicar los conceptos relacionados con límites y continuidad.

Videos educativos: YouTube y otras plataformas de video tienen una amplia variedad de videos educativos que explican de manera visual y didáctica los conceptos de límites y continuidad. Estos videos pueden ser útiles para complementar las explicaciones en el aula y brindar ejemplos prácticos de aplicación.

2.5.2 Recursos didácticos

Manipulables físicos: Utiliza manipulables físicos, como bloques de construcción, fichas o regletas, para representar gráficamente las funciones y explorar visualmente cómo cambian cerca de ciertos puntos. Esto puede ayudar a los estudiantes a comprender conceptos abstractos de una manera más concreta y tangible.

Tarjetas de actividades: Crea tarjetas de actividades con preguntas y ejercicios relacionados con límites y continuidad. Los estudiantes pueden trabajar en grupos o de forma individual para resolver los problemas y discutir sus soluciones. Estas tarjetas pueden incluir desafíos, problemas de aplicación y ejemplos concretos para fortalecer la comprensión de los conceptos.

Juegos interactivos: Diseña juegos interactivos, como juegos de mesa o juegos en línea, que involucren el cálculo de límites y el análisis de la continuidad. Estos juegos pueden ser divertidos y desafiantes, y permiten a los estudiantes practicar los conceptos matemáticos de una manera lúdica. Algunos ejemplos podrían ser "Carrera de límites" o "Buscando la continuidad".

Visualizaciones y gráficos interactivos: Utiliza visualizaciones y gráficos interactivos en clase para mostrar cómo cambian las funciones y cómo se comportan cerca de ciertos puntos. Puedes utilizar software como GeoGebra o Desmos para crear gráficos dinámicos que permitan a los estudiantes explorar diferentes funciones y observar cómo afectan los cambios en los límites y la continuidad.

Proyectos y aplicaciones prácticas: Propón proyectos o aplicaciones prácticas que permitan a los estudiantes aplicar los conceptos de límites y continuidad en situaciones del mundo real. Por ejemplo, podrían investigar cómo se modela el crecimiento de una población utilizando funciones y analizar los límites de esta función para predecir el tamaño futuro de la población.

Debates y discusiones en clase: Fomenta debates y discusiones en clase sobre temas relacionados con límites y continuidad. Puedes presentar preguntas provocativas o problemas retadores que requieran razonamiento y argumentación. Esto ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y a profundizar en su comprensión de los conceptos matemáticos.

Capítulo III. CÁLCULO DIFERENCIAL

3.0 Introducción al capítulo

El cálculo diferencial es una rama fundamental de las matemáticas que se enfoca en el estudio de las derivadas de las funciones y sus aplicaciones. En este tercer capítulo, se explorará la derivada de una función y se presentarán las reglas de derivación para varios tipos de funciones. Además, se discutirán las aplicaciones de la derivada, como la regla de L'Hôpital y el cálculo de máximos y mínimos de funciones.

En la sección 3.1, se definirá el concepto de derivada de una función y se explicará su interpretación geométrica. Se presentarán las reglas de derivación para funciones comunes, como las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Asimismo, se explicará la regla de la cadena y la derivación implícita, y se introducirá el concepto de derivada de orden superior. Los recursos tecnológicos y didácticos en esta sección ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estos conceptos y a aplicarlos en la resolución de problemas.

En la sección 3.2, se discutirán las aplicaciones de la derivada en el cálculo diferencial. Se explicará la regla de L'Hôpital y cómo se utiliza para calcular límites que presentan indeterminaciones. También se abordará el cálculo de máximos y mínimos de funciones y la representación de funciones. Se incluirán recursos tecnológicos y didácticos para facilitar la comprensión de estas aplicaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

En resumen, este tercer capítulo proporcionará una introducción completa al mundo del cálculo diferencial y su aplicación en la resolución de problemas. Los recursos tecnológicos y didácticos incluidos en este capítulo ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estos conceptos y a aplicarlos en la resolución de problemas. La comprensión de estos conceptos es fundamental para el estudio de temas más avanzados en las matemáticas superiores y su aplicación en áreas como la física, la ingeniería y la economía.

3.1 Contribución a la formación de Competencias

A partir del contenido del cálculo diferencial del Capítulo III se puede contribuir a formar las siguientes competencias genéricas, matemáticas y digitales en los estudiantes.

Competencias Genéricas:

- **Pensamiento crítico y analítico**: Los estudiantes podrán analizar y comprender conceptos matemáticos relacionados con el cálculo diferencial, identificar relaciones entre variables y realizar razonamientos lógicos en el contexto de derivadas de funciones.
- **Resolución de problemas**: Podrán aplicar los conceptos y técnicas del cálculo diferencial para resolver problemas relacionados con la derivada de funciones y su interpretación geométrica y económica.
- **Habilidades de comunicación**: Podrán expresar de manera clara y precisa las ideas matemáticas relacionadas con el cálculo diferencial, tanto de forma oral como escrita, al explicar las interpretaciones geométricas y económicas de la derivada y al comunicar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- **Trabajo en equipo**: Podrán colaborar con otros estudiantes en la resolución de problemas y actividades relacionadas con el cálculo diferencial, fomentando la discusión y el intercambio de ideas.
- **Autonomía y autorregulación**: Podrán gestionar su propio aprendizaje en el cálculo diferencial, estableciendo metas y planificando su estudio de manera efectiva.

Competencias Matemáticas:

- **Comprensión de la derivada de una función**: Los estudiantes desarrollarán la capacidad de comprender el concepto de derivada de una función y su relación con la tasa de cambio instantánea, así como la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente.

- **Aplicación de la regla general de derivación**: Aprenderán a aplicar la regla general de derivación para obtener la derivada de funciones algebraicas y trascendentes, incluyendo polinomios, exponenciales, logaritmos y funciones compuestas.
- **Interpretación geométrica de la derivada**: Podrán interpretar geométricamente la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado, y utilizar esta interpretación para analizar el comportamiento de la función.
- **Derivadas laterales**: Serán capaces de calcular las derivadas laterales y utilizarlas para analizar el comportamiento de una función en un punto específico.
- **Interpretación económica de la derivada**: Aprenderán a interpretar la derivada en el contexto económico, relacionándola con conceptos como la tasa marginal de cambio o la elasticidad.
- **Aplicación de las reglas de derivación**: Serán capaces de aplicar las reglas de derivación para obtener la derivada de funciones algebraicas y trascendentes, incluyendo la regla del producto, del cociente, de la cadena y la derivación logarítmica.
- **Cálculo de derivadas de orden superior**: Desarrollarán la habilidad de calcular derivadas de orden superior, aplicando sucesivamente el proceso de derivación.
- **Concepto de diferencial y su aproximación**: Comprenderán el concepto de diferencial como una aproximación lineal al incremento de una función y su relación con la derivada.
- **Aplicaciones de la derivada**: Serán capaces de utilizar la derivada en la resolución de problemas y aplicaciones prácticas en campos como la física, la ingeniería y la economía, incluyendo la optimización de funciones y el cálculo de máximos y mínimos.
- **Regla de L'Hôpital**: Aprenderán a utilizar la regla de L'Hôpital para calcular límites indeterminados que involucren funciones y sus derivadas.

- **Problemas de optimización**: Serán capaces de abordar problemas de optimización utilizando el cálculo diferencial, determinando máximos y mínimos relativos de funciones.
- **Ejemplos de aplicaciones de la derivada en economía**: Podrán aplicar los conceptos del cálculo diferencial en situaciones económicas, como la maximización de beneficios o la minimización de costos, y analizar el comportamiento de variables económicas utilizando la derivada.

Competencias Digitales:

- **Uso de recursos tecnológicos**: Los estudiantes podrán utilizar herramientas tecnológicas, como software de cálculo simbólico o gráfico, para explorar y visualizar funciones, realizar cálculos de derivadas y resolver problemas relacionados con el cálculo diferencial.
- **Búsqueda y gestión de información**: Serán capaces de buscar información relevante sobre cálculo diferencial en fuentes digitales confiables y organizarla de manera efectiva, utilizando herramientas tecnológicas para acceder a recursos y referencias actualizadas.
- **Comunicación digital**: Podrán utilizar herramientas digitales para presentar y compartir resultados matemáticos, como gráficas o cálculos de derivadas, de manera clara y comprensible, utilizando software especializado o plataformas de comunicación en línea.
- **Pensamiento computacional**: Aprenderán a abordar problemas matemáticos relacionados con el cálculo diferencial de manera algorítmica, utilizando herramientas digitales y la lógica computacional para diseñar estrategias de resolución.
- **Alfabetización digital**: Desarrollarán habilidades básicas relacionadas con el uso de software matemático y la comprensión de interfaces gráficas, así como la capacidad de evaluar la validez y confiabilidad de las herramientas y recursos digitales utilizados en el cálculo diferencial.

Estas competencias genéricas, matemáticas y digitales son relevantes para que los estudiantes adquieran un conocimiento sólido sobre el cálculo diferencial y puedan aplicarlo de manera efectiva en diversos contextos académicos y profesionales.

3.2 Derivada de una función

Definición: Sea y = f(x) una función dada. La derivada de y con respecto a x, denotada por $\frac{dy}{dx}$, se define por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista este límite.

Observaciones:

El símbolo $\frac{d}{dx}$ se denomina como *operador diferencial* e indica que lo que está situado a su derecha deberá ser derivado. Otra forma de este operador es D_x.

A la derivada también se le conoce como *coeficiente diferencial* y la operación de calcular la derivada de una función se denomina *derivación*.

Si la derivada de una función existe en un punto particular, decimos que la función es derivable en ese punto.

La derivada de y = f(x) con respecto a x también se denota por:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d(f)}{dx},\ \frac{df}{dx},\ D_x(y),\ D_x(f)$$

3.2.1 Regla general de derivación

Para derivar cualquier función y = f(x) se deben dar los siguientes pasos:

1) Se da un incremento Δx a la variable independiente x y se obtiene, en general, un incremento en la función cuyo nuevo valor será y + Δy = f(x + Δx), esta será la *función incrementada*.

2) Para obtener el *incremento de la función* Δy, se tiene que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3) Se divide Δy por Δx y se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A esta expresión se le denomina como *razón incremental o tasa de cambio promedio*.

4) Se calcula el límite de la razón incremental cuando el incremento de la variable independiente (Δx) tiende a cero obteniéndose la tasa de cambio instantánea o derivada de la función f(x).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo:

Calcule la derivada de la función $y = 3x^2 + 5$.

Solución:

1. Para obtener la función incrementada $y + \Delta y$, sustituimos a x por $x + \Delta x$ en la función original así:

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$$

obteniéndose la función incrementada.

2. Para obtener el incremento de la función, restamos a la función incrementada, la función sin incrementar así:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 + 5 - (3x^2 + 5) \\ &= 3[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 5 - (3x^2 + 5) \\ &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 - 3x^2 - 5 \\ &= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

3. Dividiendo por Δx, obtenemos:

$\Delta y/\Delta x = 6x + 3\Delta x$

4. Calculando:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3x) = 6x = f'(x)$$

Observación:

A pesar de que este es el procedimiento general para encontrar la derivada de las funciones reales, no es el que en la práctica se utiliza para encontrar las derivadas de funciones. Más adelante se presentarán las reglas de derivación que posibilitan un proceder más práctico y simplificado para encontrar la derivada (ver subepígrafe 3.1.6).

3.2.2 Interpretación geométrica de la derivada

Para realizar esta interpretación se utilizarán como apoyo, los mismos pasos que se dieron para calcular la derivada de cualquier función mediante la regla general de derivación y a partir de estos se realizará la interpretación geométrica.

Sea $y = f(x)$ una función continua en un determinado dominio D y $A_0(x,y)$ un punto fijo de la curva, así como $A_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punto móvil de la misma, muy cercano a A_0. Véase la figura 42.

Primer paso:

- Si se da un incremento Δx a la variable x, se obtiene, en general, un incremento Δy de la función y, es decir:

  $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = NA_1$ función incrementada

Segundo paso:

- Se busca el incremento de la función Δy:

  $\Delta y = f(x + \Delta x) – f(x) = NA_1 – NR = RA_1$

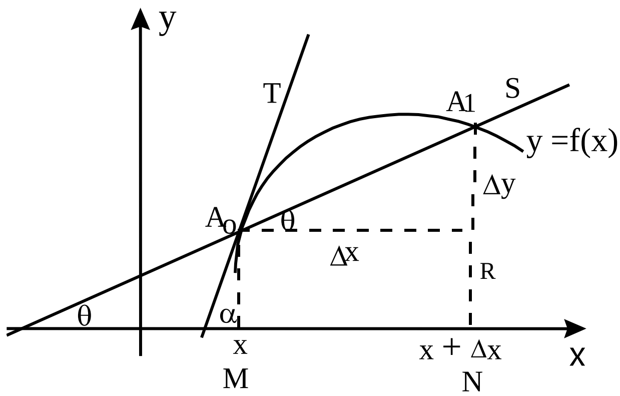


Figura 42. Interpretación geométrica de la derivada de una función.

Tercer paso:

Dividiendo Δy entre Δx para obtener la razón incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{RA_1}{MN} = \frac{RA_1}{A_0R}$$

$$= \tan \angle RA_0A_1 = \tan\theta$$

= pendiente de la secante A_0A_1

Obsérvese detenidamente el sentido geométrico del cuarto paso. Como Ao es un punto fijo y A_1 un punto móvil de la curva, a medida que Δx tiende a cero, el punto A_1 se mueve sobre la curva acercándose a Ao y la recta secante AoA_1, va tomando como posición límite, la de la tangente en el punto Ao. En la figura 42 tenemos que:

θ = ángulo de inclinación de la secante AoA_1

θ = ángulo de inclinación de la tangente AoT

Luego, por lo que:

Cuarto paso:

Calculando el límite de la razón incremental cuando el incremento de la variable independiente Δx tiende a cero, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\alpha = \tan\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) = m_T$$

donde m_T es la pendiente de la recta tangente a la función f(x) en el punto Ao

Observación: Por lo tanto, el valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

3.2.3 Ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva en un punto

Partiendo de la interpretación geométrica de la derivada, puede determinarse fácilmente las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva en ese punto.

Sea $y = f(x)$ la expresión analítica de una función. Si se quiere obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(x_0,y_0)$, debe procederse de la siguiente manera:

a) Calculamos la primera derivada de la función y se evalúa para el punto $P(x_o,y_o)$, obteniéndose el valor numérico de la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

b) Teniendo la pendiente y un punto, se determina la ecuación de la recta, mediante la fórmula:

$$y - y_o = m_T (x - x_o)$$

Observación:

Como la recta normal a la curva en $P(x_o,y_o)$ es perpendicular a la tangente, debe cumplirse que:

$$m_T = -\frac{1}{m_N} \quad \text{ó} \quad m_T \times m_N = -1$$

Ejemplo:

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 + 3$ en el punto (1,1).

Solución:

Calculando la derivada de la función, se tiene:

$$y' = 2x$$

De aquí se sigue que $m_T = 2x$, y como se quiere la ecuación de la tangente en el punto (1,1),

$m_T|_{x=1} = 2(1) = 2$

que es el valor de la pendiente de la tangente. Así, la ecuación de la tangente en ese punto será:

$y - 1 = 2(x - 1)$

$y - 1 = 2x - 2$

$y = 2x - 1$

La ecuación de la recta normal en ese punto será:

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + 3/2$

3.2.4 Derivadas laterales

Retomando el concepto de función derivada, supongamos que al considerar que $\Delta x \to 0$, lo hace sólo para valores a la derecha del punto fijo x, es decir, considerando sólo los valores positivos ($\Delta x > 0$), entonces el límite correspondiente (si existe), recibe el nombre de *derivada lateral derecha* de f en el punto x. Se puede representar así:

$$\lim_{\Delta \to x} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x} = f'_{+}(x) = f'_{der}(x)$$

Análogamente, cuando $\Delta x \to 0$, haciéndolo sólo para valores a la izquierda del punto fijo x, es decir, considerando los valores negativos ($\Delta x < 0$), entonces el límite correspondiente (si existe), recibe el nombre de *derivada lateral izquierda* de f en el punto x. Esta puede representarse así:

$$\lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x} = f'_{-}(x) = f'_{izq}(x)$$

Para que exista la derivada $f'(x_o)$ de la función $y = f(x)$ en el punto $x = x_o$, es necesario y suficiente que existan y coincidan en dicho punto sus derivadas a la izquierda y a la derecha, es decir, debe cumplirse:

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$$

En caso contrario la función no es derivable en x = x_0.

Ejemplo:

Sea la función y = |x|, analice si existe la derivada de esta función en el punto x= 0

Solución:

Véase la figura 43 la representación geométrica de la función modular.

Así tenemos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

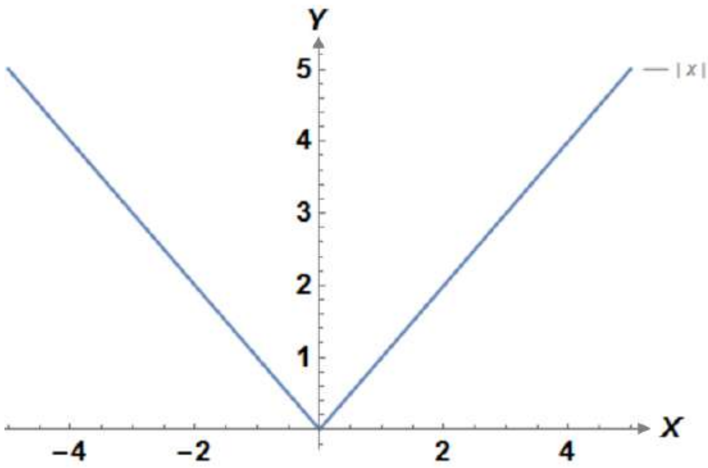


Figura 43. Representación geométrica de la función modular.

Si x > 0, se tiene x + Δx > 0 para Δx suficientemente pequeño y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Si x < 0, tenemos x +Δx < 0 para Δx suficientemente pequeño y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$$

De este modo:

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$, es decir, $\Delta y/\Delta x = 1$ si $x > 0$ ó $\Delta y/\Delta x = -1$ si $x < 0$.

Sea ahora x = 0, entonces:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \text{Signo } \Delta x$$

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \text{signo} \quad \Delta x = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \Delta x > 0 \\ -1, & \text{si} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$$

Por esta razón:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Así pues, la función |x| tiene en el punto x = 0 una derivada derecha igual a 1, y una derivada izquierda igual a −1, lo que significa que no existe la derivada en el punto x = 0.

3.2.5 Interpretación económica de la derivada

Para llevar a cabo esta interpretación nos apoyaremos en el ejemplo que se presenta a continuación.

Supongamos que en una fábrica el costo total de producir x artículos por semana viene dado por C =200 + 0.03x (pesos). Así, si se producen 100 artículos a la semana, el costo será $C = 200 + 0.03\ (100)^2 = \$500$ y el costo promedio por artículo será 500/100= \$5.00.

Si se quiere cambiar el nivel de producción semanal de 100 a (100 + Δx), en donde Δx representa el incremento de la producción en la semana, entonces el costo es:

$$C + \Delta C = 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2$$

$$= 200 + 0.03[10000 + 200\Delta x + (\Delta x)^2]$$

$$= 200 + 300 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$$

$=500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$

Por tanto, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es:

$\Delta C = (C + \Delta C) - C = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500$

$= 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$

Y el costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$\Delta C/\Delta x = 6 + 0.03\Delta x$ que constituye la tasa de cambio promedio.

Es decir, si la producción aumenta de 100 a 150 artículos por semana (de modo que $\Delta x = 50$), el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a 6 + 0.03 (50) = \$7.50 por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno. Por lo que el *costo marginal* es el límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Es decir, es el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida.

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 + 0.03\Delta x}{\Delta x} = 6$$

siendo este valor la tasa de cambio instantánea.

Observación: En el caso de una función de costo general C(x) que represente el costo de producir una cantidad x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

El costo marginal es la derivada de la función de costo total respecto a la cantidad producida y se representa por:

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}$$

3.2.6 Reglas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes

Para calcular la derivada de cualquier función basta con aplicar la regla general de derivación basada en la definición de derivada, sin embargo, ese proceso es laborioso y a veces difícil. Debido a esto, para simplificarlo se utilizan las llamadas *reglas de derivación para funciones elementales (algebraicas y trascendentes),* las que pueden ser demostradas a través de la regla general. Así, si u = f(x); v = g(x); w =h(x) son funciones derivables de x podemos expresar:

- *La derivada de una función constante es cero.*

$\frac{d(c)}{dx} = 0$, donde c es un valor constante

- *La derivada de una variable respecto a ella misma es igual a* 1.

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

- *La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de sus derivadas.*

$$\frac{d(u + v - w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

- La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$, donde c es una constante.

- *La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.*

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

- *La derivada de una función potencial es igual al producto del exponente por la base elevada al exponente disminuido en uno por la derivada de la base.*

$$\frac{d}{dx}(u^{n}) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \quad \text{(con n constante)}$$

- *La derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador dividido todo por el cuadrado del denominador.*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^{2}}$$

- *La derivada de una función dividida por una constante es igual a la derivada de la función dividida entre la constante.*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c} \quad \text{(con c como valor constante)}$$

- *La derivada de la raíz enésima de una función es igual a la derivada de la función entre n veces la raíz enésima de la función elevada al índice de la raíz disminuido en uno.*

$$\frac{d(\sqrt[n]{u})}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2$$

- *La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual a la derivada de la función dividida entre el duplo de la raíz cuadrada de la función.*

$$\frac{d(\sqrt{u})}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

- *La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función, dividida entre la función.*

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

- *La derivada del logaritmo de base 10 de una función es igual a la derivada de la función dividida entre la función, multiplicado todo por el logaritmo base 10 de e.*

$$\frac{d}{dx}(\log u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}\log e$$

- *La derivada de una función exponencial de base diferente de e es igual a la propia función por el logaritmo natural de la base y por la derivada del exponente*

$$\frac{d}{dx}(a^n) = a^n(\ln a)\frac{dn}{dx}\ , \text{ con } a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$$

- *La derivada de una función exponencial de base e es igual a la propia función por la derivada del exponente.*

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

- *La derivada de una función potencial–exponencial o sea una exponencial de base variable y exponente variable es igual a la suma de las derivadas, considerándola primero como una función potencial y después como una función exponencial o viceversa.*

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u\frac{dv}{dx}$$

- *La derivada del seno de una función es igual al coseno de la función por la derivada de la función.*

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

- *La derivada del coseno de una función es igual a menos el seno de la función por la derivada de la función.*

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$$

- *La derivada de la tangente de una función es igual a la secante al cuadrado de la función por la derivada de la función*

$$\frac{d}{dx}(\tan\ u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

- *La derivada de la cotangente de una función es igual a menos la cosecante cuadrada de la función por la derivada de la función.*

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

- *La derivada de la secante de una función es igual al producto de secante de la función por la tangente de la función y por la derivada de la función.*

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \times \tan u \frac{du}{dx}$$

- *La derivada de la cosecante de una función es igual a menos el producto de la cosecante de la función por la cotangente de la función y por la derivada de la función.*

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \times \cot u \frac{du}{dx}$$

- *La derivada del arco seno de una función es igual a la derivada de la función dividida por la raíz cuadrada de uno menos la función al cuadrado*

$$\frac{d(\mathrm{arcsen}\ u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

- *La derivada del arco coseno de una función es igual a la fórmula anterior, pero precedida de signo menos.*

$$\frac{d(\arccos\ u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

- *La derivada del arco tangente de una función es igual a la derivada de la función dividida entre uno más el cuadrado de la función.*

$$\frac{d(\text{arctag}u)}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

- *La derivada del arco cotangente de una función es igual a la fórmula anterior, pero precedida del signo menos.*

$$\frac{d(\text{arccot } u)}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

- *La derivada del arco secante de una función es igual a la derivada de la función dividida entre el producto de la función por la raíz cuadrada de la función al cuadrado menos 1.*

$$\frac{d(\text{arcsec } u)}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

- *La derivada del arco secante de una función es igual a la fórmula anterior precedida de signo menos.*

$$\frac{d(\text{arc csc } u)}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 5 + \frac{1}{x}-\sqrt{x^2+x}$

b) $y = 3x^2 + xe^x – \ln (x^2 +3) + x/5$

c) $y = (x^3 +3)^2 + x^x – \text{sen } x^3$

Solución:

a) $y = 5+\frac{1}{x}-\sqrt{x^2+x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(5)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + x}\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x)}{2\sqrt{x^2 + x}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

b) $y = 3x^2 + x.e^x - \ln(x^2 + 3) + x/5$

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(x^2) + x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) - \frac{\frac{d}{dx}(x^2+3)}{x^2+3} + \frac{1}{5}\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 3(2x) + xe^x + e^x - \frac{2x}{x^2+3} + 1/5$$

$$= 6x + xe^x + e^x - \frac{2x}{x^2+3} + 1/5$$

c) $y = (x^3 + 3)^2 + x^x - \text{sen}\, x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 3)^2 + \frac{d}{dx}(x^x) - \frac{d}{dx}(\text{sen}\, x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^3 + 3)\frac{d}{dx}(x^3 + 3) + x.\, x^{x-1}\frac{d}{dx}(x) + x^2 \ln x \frac{d}{dx}(x) - \cos x^3 \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 2(x^3 + 3)(3x^2) + x.x^{x-1} + x^x \ln x - (3x^2)\cos x^3$$

$$= 6x^2(x^3 + 3) + x^x + x^x \ln x - (3x^2)\cos x^3$$

3.2.7 Derivadas de funciones compuestas

En ocasiones sucede que la variable *y* no se define, directamente, como función de *x*, sino que se da como función de otra variable *v* que es definida como función de *x*. En este caso, *y* es función de *x* por intermedio de v, y se llama *función de función o función compuesta*

Para derivar estos tipos de funciones se puede:

1. Expresar la variable *y* directamente como función de *x*, es decir, realizar la composición primero y luego derivar.
2. Aplicar la Regla de la cadena, es decir, si y=f(v) y v=g(x), entonces: dy/dx = dy/dv. dv/dx

Demostremos lo expresado en el punto 2 a través de la aplicación de la regla general de derivación simultáneamente a las dos funciones, así:

- **Paso # 1**: $y + \Delta y = f(v + \Delta v)$ $\quad$ $v + \Delta v = g(x + \Delta x)$
- **Paso # 2**: $\Delta y = f(v + \Delta v) - f(v)$ $\quad$ $\Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$
- **Paso # 3**: $\dfrac{\Delta y}{\Delta v} = \dfrac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v}$ $\quad$ $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

Formemos el producto de las dos razones, tomando los primeros miembros, así:

$\Delta y/\Delta v \times \Delta v/\Delta x$ que es igual a $\Delta y/\Delta x$.

Por tanto, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta v}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

- **Paso # 4**: cuando $\Delta x \to 0$, igualmente $\Delta v \to 0$. Pasando al límite, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

lo que es igual a $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dx}$

Observación: La derivada de la variable *y* respecto a *x* es igual al producto de la derivada de *y* respecto a v por la derivada de v con respecto a x.

Ejemplo

Tasas relacionadas. La función de costo de una cierta empresa es $C(x) = 25 + 2x - 1/20\ (x^2)$, donde x es el nivel de producción. Si este es igual a 5 actualmente y está creciendo a una tasa de 0.7 por año, calcule la tasa en que los costos de producción se están elevando.

Solución:

Se conoce que dx/dt = 0.7 (aquí el tiempo está dado en años).

El *costo marginal* se obtiene mediante:

dc/dx = 2 – x/10

Por consiguiente: $\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dx} \times \frac{dx}{dt} = (2 - \frac{x}{10})\frac{dx}{dt}$

Sustituyendo x =5, el nivel de producción actual, obtenemos: dc/dt= (2 – 5/10)(0.7) = 1.05

Este resultado indica que los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1.05 por año.

3.2.8 Derivadas de funciones implícitas

Cuando se da una ecuación que relaciona dos variables *x* (variable independiente) e *y* (variable dependiente), de manera que la variable que representa a la función (y) no está despejada, se dice que y es una *función implícita* de x.

Por ejemplo, la ecuación

y – 2x = 0, (1)

define *y* como función implícita de *x*. También podría considerarse a *x* como función implícita de y.

En general, cuando una ecuación, definida en el campo de variación de sus variables se escribe de la forma f(x, y) = 0 se dice, que y es una *función implícita de x* o viceversa.

A veces es posible despejar la variable que representa a la función, obteniendo así una *función explícita*. En la ecuación (1) puede despejarse a *y*, obteniéndose

y = 2x, (2)

donde *y* aparece como función explícita de x. Sin embargo, puede ocurrir que la variable *y* que representa la función no pueda ser despejada, por ejemplo, en la ecuación:

$x^3 + 2x^2y - y^3x = 5$

Como puede observarse en esta ecuación no es posible despejar a la variable y, en este caso para calcular la derivada de y con respecto a x, es necesario seguir el llamado proceso de derivación implícita, que consiste en los siguientes pasos:

- **Primer paso**:

  Se deriva término a término respecto a la variable independiente x, así tenemos:

  $d(x^3)/dx + d(2x^2y)/dx - d(y^3x)/dx = d(5)/dx$

  $3x^2 + (2x^2dy/dx + 4xy) - (y^3 + 3xy^2dy/dx) = 0$

  $3x^2 + 2x^2dy/dx + 4xy - y^3 - 3xy^2dy/dx = 0$

- **Segundo paso**:

  Se agrupan en un miembro los términos que contienen la primera derivada (dy/dx) y en el otro miembro los que no la contienen; así tenemos:

  $2x^2dy/dx + 3xy^2dy/dx = y^3 - 3x^2 - 4xy$

- **Tercer paso:**

  Sacando como factor común la primera derivada, tenemos:

  $(2x^2+3xy^2)dy/dx = y^3 - 3x^2 - 4xy$

- **Cuarto paso:**

  Despejando la primera derivada, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 3x^2 - 4xy}{2x^2 + 3xy^2}$$

Note que la primera derivada es, en general, una función de *x* y de *y*.

3.2.9 Método de la derivación logarítmica

Este método es útil usarlo para simplificar el proceso de derivación y generalmente, debe ser aplicado cuando es posible aplicar previamente las propiedades de los logaritmos y después derivar. Consiste en aplicar logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación y basado en las propiedades de los logaritmos, transformar la función original en una expresión equivalente donde el proceso de derivación sea más simple.

Ejemplo

Dada la siguiente función $y = \frac{x(x^2 - 3)e^x}{\sqrt{x+3}}$, determine la derivada y'.

Solución:

- **Primer paso**

Aplicando *ln* a ambos miembros, tenemos:

$$\ln y = \ln \frac{x(x^2 - 3)e^x}{\sqrt{x+3}}$$

- **Segundo paso:**

Aplicando propiedades de los ln en el segundo miembro, tenemos:

$$\ln y = \ln x(x^2–3)e^x – \ln(x+3)^{1/2}$$

$$= \ln x + \ln (x^2–3) + \ln e^x – ½\ln (x+3)$$

$$= \ln x + \ln (x^2–3) + x\ln e – ½ \ln (x+3)$$

- **Tercer paso:**

Derivando implícitamente, tenemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 3} + 1 - 1/2\frac{1}{x+3}$$

- **Cuarto paso:**

Despejando y' tenemos:

$$y' = y\ \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 3} + 1 + \frac{1}{2(x+3}$$

$$y' = \frac{x(x^2\quad 3)e^x}{\sqrt{x+3}}\ \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2\quad 3} + 1 - \frac{1}{2(x+3)}$$

3.2.10 Derivadas de orden superior

En general, la derivada de una función de x es también una función de x. Puede ocurrir que esta nueva función sea también derivable; en este caso la derivada de la primera derivada se llama segunda derivada de la función original. De la misma manera, la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada, y así sucesivamente, hasta la derivada enésima.

A su vez, a estas derivas también se les conoce como derivadas de orden superior, o sea: derivada de primer orden, derivada de segundo orden, derivada de tercer orden y así sucesivamente hasta la derivada de enésimo orden.

Observación: note que, si el orden de la derivada superior se escribe con números arábigos, estos deben escribirse entre paréntesis para no confundirlo con un exponente de potencia, es decir, si y = f(x) es una función que admite derivadas de orden superior en un determinado dominio D, podemos escribir sus derivadas sucesivas así:

$y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$, . . . , $y^{(n)}$

ó y^{II} ,y^{III} ,y^{IV}, . . . ,$y^{(n)}$

es decir, en este caso se escriben con números romanos sin paréntesis, con excepción de la derivada enésima.

Ejemplo

Dada la función $y=3x^3+2x^2-x+1$ calcule la derivada de tercer orden $dy^{(3)}= d^3y/dx^3 = y'''$

Solución:

$y' = 9x^2+ 4x-1$

$y'' = 18x + 4$

$y''' = 18$

Note que en el caso de un polinomio de grado n, la derivada enésima $y^{(n)}$ siempre será una constante y las derivadas de orden superior $y^{(n+1)}$; y $^{(n+2)}$;... son todas iguales e iguales a cero.

3.2.11 Concepto de diferencial de una función de una variable independiente

Supongamos que la función y = f(x) es derivable en el intervalo [a, b]. En un punto x del intervalo [a, b] la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x)$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\Delta y/\Delta x$ tiende a un número determinado f'(x), por tanto, se diferencia de la derivada f'(x) en una magnitud infinitamente pequeña:

$\Delta y/\Delta x = f'(x) + \alpha$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por Δx, obtenemos:

$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x$ (5)

Dado que en el caso general f'(x) = 0, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \to 0$, el producto $f'(x) \times \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx. El producto $\alpha\ \Delta x$ es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx, ya que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Así pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nombre de *parte principal* del incremento [cuando $f'(x) \neq 0$], que es lineal con relación a Δx.

Definición: El producto f'(x). Δx se denomina diferencial de la función y se designa por dy ó df(x).

De modo que, si la función y = f(x) tiene derivada f'(x) en el punto x, el producto de esta por el incremento Δx, del argumento se llama *diferencial de la función* y se designa con el símbolo dy, o sea,

$$dy = f'(x).\ \Delta x \qquad (6)$$

Hallemos el diferencial de la función y = x. En este caso y'= (x)' = 1, y por tanto:

$$dy = dx = \Delta x \quad ó \quad dx = \Delta x$$

De este modo, el diferencial dx de la variable independiente x coincide con su incremento Δx. La igualdad dx = Δx podría considerarse como definición del diferencial de una variable independiente. Así la expresión puede escribirse:

$$dy = f'(x)\ dx$$

Por tanto, la derivada f'(x) puede ser considerada como razón del diferencial de la función respecto al diferencial de la variable independiente. Así, la fórmula (5), puede expresarse:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x \qquad (7)$$

Así pues, el incremento de la función difiere del diferencial de esta en una magnitud infinitamente pequeña, de orden superior respecto a Δx.

Esto nos permite, a veces, utilizar en los cálculos aproximados la igualdad aproximada:

$$\Delta y \approx dy \qquad (8)$$

ó lo que es lo mismo

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x).\ \Delta x \qquad (9)$$

3.2.12 El diferencial como aproximación del incremento

Es evidente que el incremento de la función Δy y su diferencial dy son aproximadamente iguales. Cuando solamente se desea un valor aproximado del incremento de una función, en general, es más fácil, desde el punto de vista del cálculo, calcular el diferencial que el incremento.

Ejemplos

1) Sea $y = x^2 + x + 1$ y supongamos que x sufre un incremento desde x = 2 hasta x = 2.01. Encuentre el diferencial

Solución:

La variación real está dada por $\Delta y = [(2.01)^2 + 2.01 + 1] - [2^2 + 2 + 1] = 0.0501$

y su diferencial por $dy = f\,'(x)dx = (2x + 1)dx = [2(2) + 1][0.01] = 0.05$.

Nótese que los anteriores, son valores aproximadamente iguales.

2) Calcular aproximadamente el valor de $\sqrt[3]{126}$

Solución:

Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Como 126 no tiene raíz cúbica exacta, buscamos un número próximo a él, que si tenga raíz cúbica exacta, en este caso 125 y así obtenemos:

$x_0 = 125 \Rightarrow f(x_0) = f(125) = \sqrt[3]{125}$

$x_0 + \Delta x = 126 \Rightarrow \Delta x = 126 - x_0 \Rightarrow x = 126 - 125 = 1 = dx$

$f(x_0 + \Delta x) = f(126) = \sqrt[3]{126}$

Como $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df / x = x_0$

$f(x_0 + \Delta x) \approx df/x = x_0 + f(x_0)$

Además:

$f'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x_0) = f\,'(125) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(5^3)^2} = 1/3.5^2 = 1/75$

$df\big|_{x=x_0} = f\,'(x_0)\Delta x = f\,'(x_0)dx = 1/75(1) = 1/75$

luego $\sqrt[3]{126}=\frac{1}{75}+5=5.0133$

3.3 Aplicaciones de la derivada

La derivada es un concepto fundamental en el cálculo diferencial que desempeña un papel clave en diversos campos, como el análisis de funciones, la obtención de límites y la solución de problemas económicos. En el contexto de la maximización y minimización de funciones, la derivada permite determinar los puntos críticos donde una función alcanza sus máximos o mínimos locales. Estos puntos críticos representan valores extremos que son de gran importancia en la optimización de sistemas y la toma de decisiones.

Además, la derivada también es fundamental para comprender y calcular límites. Al analizar el comportamiento de una función a medida que se acerca a un punto específico, se utilizan técnicas derivativas para calcular la tasa de cambio instantáneo y determinar si la función se aproxima a un valor límite o diverge. Esta capacidad de aproximar límites usando la derivada es esencial en el estudio de funciones y en la resolución de problemas matemáticos y científicos más complejos.

En el ámbito de la economía, la derivada tiene una importancia significativa. Muchos problemas económicos implican la optimización de funciones que representan variables clave, como costos, ingresos o utilidades. Al utilizar las herramientas derivativas, es posible determinar los puntos críticos que representan la maximización o minimización de estas variables, lo que resulta fundamental para la toma de decisiones eficientes en el ámbito empresarial y económico.

En resumen, la derivada es esencial para el análisis de funciones, la determinación de máximos y mínimos, la obtención de límites y la solución de problemas económicos. Su comprensión y aplicación adecuada permiten realizar análisis más profundos de fenómenos matemáticos y científicos, así como facilitar la toma de decisiones en el ámbito empresarial y económico. Por lo tanto, el estudio y dominio de la derivada representan una herramienta invaluable para resolver una amplia gama de problemas y situaciones en diversos campos del conocimiento.

3.3.1 *Regla de L'Hôpital*

En el cálculo de límites de funciones es frecuente encontrar indeterminaciones del tipo 0/0, problema que fue analizado con otro enfoque en el capítulo anterior dedicado a límites y continuidad. El estudio de la regla de L'Hôpital posibilita, en general, darle solución a este problema a través del uso de las derivadas de funciones antes estudiadas.

Teorema: Regla de L'Hôpital

Supongamos que las funciones f(x) y g(x) satisfacen en cierto intervalo [a, b] las condiciones del teorema de Cauchy y se reducen a cero en el punto x = a, es decir:

$f(a) = g(a) = 0$

Entonces, si existe el límite de la razón f'(x)/g'(x), cuando $x \to a$, existirá también $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

y además: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración

Tomemos en el intervalo [a, b] un punto $x \neq a$. Aplicando el Teorema de Cauchy, tendremos que:

$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, donde c es un punto que se encuentra entre a y x.

Según la condición f(a) = g(a) = 0. Esto significa que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Si $x \to a$, también $c \to a$, ya que c está entre a y x.

Al mismo tiempo, si

$$\lim_{\Delta x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$$

Entonces, existirá también $\lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$, está claro que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

y en definitiva, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Observaciones:

1) Si $\lim_{x \to a} f'(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g'(x) = 0$, se puede aplicar de nuevo la Regla de L'Hôpital, obteniendo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Este proceso puede aplicarse tantas veces como sea necesario para eliminar la indeterminación.

2) El teorema es válido cuando:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$$

Es decir, se cumplirá que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3) El teorema también se cumple cuando f(x) y g(x) no sean continuas en x = a, es decir:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$

Entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Es decir, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma la forma indeterminada ∞/∞ cuando $x \to a$ (igualmente cuando $x \to \pm\infty$).

En este caso se puede extender la Regla de L'Hôpital para la determinación del límite:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)}} \quad y \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

A continuación, se muestran algunos ejemplos que ilustran la aplicación de la Regla de L'Hôpital.

Ejemplos:

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

Solución:

f(1) = ln1 = 0   y   g (1) = 1 – 1 = 0, es decir,

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ = 0/0   Es una indeterminación!

Aplicando la Regla de L'Hôpital I tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \frac{e^\infty}{2(\infty)} = \frac{\infty}{\infty}$ ¡Es una indeterminación!

Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \frac{e^\infty}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

3. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$ ¡Es una indeterminación!

Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{2.\infty}{e^{\infty}}=\frac{\infty}{\infty}$$ ¡Es una indeterminación nuevamente!

Por lo que puede aplicarse otra vez la Regla de L'Hôpital, entonces tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2.}{e^{\infty}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Otras formas indeterminadas

Además de las indeterminaciones 0/0 y ∞/∞, existen otras formas indeterminadas como son: $\infty-\infty$; $\infty\cdot 0$; 0^0; 1^{∞}; ∞^0.

Estas últimas cinco formas indeterminadas pueden transformarse en una de las dos primeras y a ellas se les puede aplicar la Regla de L'Hôpital.

Observación:

Hay que tener en cuenta que cada vez que se realice una transformación algebraica, se debe comprobar si se ha obtenido una indeterminación del tipo 0/0 ó ∞/∞, pues puede ocurrir que la indeterminación original se elimine por un simple proceso algebraico y en este caso, no es necesario aplicar la Regla de L'Hôpital.

Veamos a continuación como se eliminan los diferentes tipos de indeterminación.

- **Indeterminación del tipo** $\infty-\infty$

En general, cuando se obtiene una indeterminación de este tipo, se debe efectuar la diferencia para transformarla en un cociente y con ello lograr una indeterminación del tipo 0/0 ó ∞/∞ .

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right]$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right]=\frac{1}{\ln 1}-\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$ Es una indeterminación!

Transformando la diferencia en cociente tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\frac{1-1-1\ln 1}{(1-1)\ln 1}=\frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x\frac{1}{x}+\ln x}{lx+(x-1)\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-1-\ln x}{\ln x+1-1/x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\ln x+1-1/x}=\frac{-\ln 1}{\ln 1+1-1/1}$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital otra vez, tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\ln x+1-1/x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1/x}{1/x+1/x^2}=\frac{-1/1}{1/1+1/1^2}=\frac{-1}{1+1}=-1/2$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right]$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right]=\frac{4}{2^2}-\frac{1}{2-2}=4/0-1/0=\infty-\infty$$ . . . Indeterminado

Transformando la diferencia en cociente, tenemos:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4-x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+2}=\frac{-1}{2+2}=-1/4$$

Observe que al lograr el cociente no se obtuvo una indeterminación, por tanto, no hubo necesidad de resolverla.

- **Indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$**

Supongamos que

$\lim\limits_{\Delta x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{\Delta x\to a} g(x) = \infty$, $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x\to a} g(x) = 0 \cdot \infty$, es una indeterminación!

Esta puede ser resuelta escribiendo:

$$\lim_{\Delta x\to a} f(x).g(x) = \lim_{\Delta x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

ó $$\lim_{\Delta x\to a} f(x).g(x) = \lim_{\Delta x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

De esa manera se obtendrá una indeterminación del tipo 0/0 ó ∞/∞, y se podrá aplicar la Regla de L'Hôpital.

La elección de la transformación en cociente, para facilitar la aplicación de la Regla de L'Hôpital, depende de la expresión dada.

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \infty^2 e^{-\infty^2} = \infty^2 e^{-\infty} = \infty.\frac{1}{e^{\infty}} = \infty.0$$

Transformando el producto en cociente, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \approx \frac{\infty}{\infty}$$ es una indeterminación!

Aplicando L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

2. Calcular $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$

Solución:

$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$ es una indeterminación!

Transformando el producto en cociente, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}} = -\frac{\infty}{\infty}$$ es una indeterminación!

Aplicando L'Hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

- **Formas indeterminadas del tipo** $0 \cdot 0, \infty^0, 1^\infty$

Al calcular límite de funciones del tipo $f(x)^{g(x)}$, se puede obtener algunas de las formas indeterminadas como $0 \cdot 0, \infty^0, 1^\infty$

Para resolver cualquiera de las tres formas indeterminadas, se puede aplicar el siguiente procedimiento:

- **Primer paso**: representar mediante una variable y a la función dada, es decir, $y = f(x)^{g(x)}$
- **Segundo paso**: aplicar logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad anterior.

  $\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$

- **Tercer paso**: aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia en el segundo miembro:

  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$

- **Cuarto paso**: aplicar límites a ambos miembros, o sea: $\lim \ln y = \lim g(x) \cdot \ln f(x)$ Aquí se obtendrá en el segundo miembro una forma indeterminada del tipo $\infty \cdot 0$.
- **Quinto paso**: transformar esa indeterminación en una del tipo 0/0 ó ∞ / ∞ .
- **Sexto paso**: aplicar la regla de L'Hôpital, obteniendo un valor finito (L) o infinito ($\pm\infty$):

  $\lim \ln y = L$ ó $\lim \ln y = \pm\infty$

- **Séptimo paso**: si $\lim \ln y = L$, se tiene por una propiedad de los límites que: $\ln \lim y = L$, y por definición de logaritmo el $\lim y = e^L$, es decir, $\lim f(x)^{g(x)} = e^L$.

  De la misma manera:

  Si $\lim \ln y = \infty$, se tiene que $\ln \lim y = \infty$ y $\lim y = e^{\infty}$, es decir, $\lim f(x)^{g(x)} = \infty$.

  Si $\lim \ln y = -\infty$, se tiene que $\ln \lim y = -\infty$, y $\lim y = e^{-\infty}$, es decir $\lim f(x)^{g(x)} = 0$.

Observación: en el caso de cualquiera de estas tres indeterminaciones $0 \cdot 0, \infty^0, 1^\infty$ puede utilizarse la fórmula:

$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$

Es decir, se reduce a calcular el exponente del número de Euler, que no es más que límite del exponente por el logaritmo natural de la base.

A continuación presentaremos dos ejemplos ilustrativos

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 0} x^x = 0^0$, es una indeterminación!

Al aplicar los 7 pasos descritos anteriormente, tenemos:

- **Primer paso**: Sea $y = x^x$
- **Segundo paso:** aplicando ln a ambos miembros: $\ln y = \ln x^x$
- **Tercer paso**: aplicando propiedad de los logaritmos: $\ln y = x \ln x$
- **Cuarto paso:** aplicando límite a ambos miembros: $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

  Trabajando en el segundo miembro, se obtiene: $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$, es una indeterminación!

- **Quinto paso**: transformando la indeterminación a una del tipo ∞/∞:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}} = -\frac{\infty}{\infty}$$, es una indeterminación!

- **Sexto paso: aplicando L'Hôpital:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

- **Séptimo paso**: Como : $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, entonces, por propiedad de los límites, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0$ y por definición de logaritmos, tenemos:

$\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$, por lo que el límite buscado es $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} = [e^0 + 3(0)]^{\frac{1}{0}} = [1+0] = 1^{\infty}$, es una indeterminación!

Aplicando la fórmula $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ \ln f(x)}$ tenemos:

$$\lim_{x\to 0}(e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x+3x)}$$

Resolviendo el límite del exponente, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x + 3x) = \frac{1}{0}\ln(e^0 + 3(0)) = \frac{1}{0}\ln 1 = \infty.0$$, es una indeterminación!

Transformando el producto en cociente, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + 3x)}{x} = \frac{\ln(e^0 + 3(0))}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + 3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x + 3}{e^x + 3x}}{1} = \frac{e^0 + 3}{e^0 + 3(0)} = \frac{1+3}{1+0} = 4/1 = 4$$

Luego obtenemos que $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^4$

3.3.2 *Cálculo de máximos y mínimos de funciones*

Definición: una función f tiene un **máximo absoluto** (**o máximo global**) en c si f(c) ≥ f(x) para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número f(c) se llama **valor máximo** de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si f(c) ≤ f(x) para todo x en D; el número f(c) se denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximos y mínimos de f se conocen como **valores extremos** de f.

En la figura 44 en los punto *a* y *d* se representan los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de una función, respectivamente. Observe que el punto (*a*, f(*a*)) es el punto más bajo de la gráfica f; mientras que el punto (*d*, f(*d*)) es el punto más alto. Sin embargo, si solo considera valores de *x* cercanos a *b*, por ejemplo los valores que en la figura 44 pertenecen al intervalo (*a, c*), entonces f(*b*) es el más grande de esos valores de f(x) y se conoce como *valor máximo local* de f. De modo análogo, f(c) es el *valor mínimo local* en el intervalo (*b, d*). La función también tiene un mínimo local en *e*. En general se da la siguiente definición.

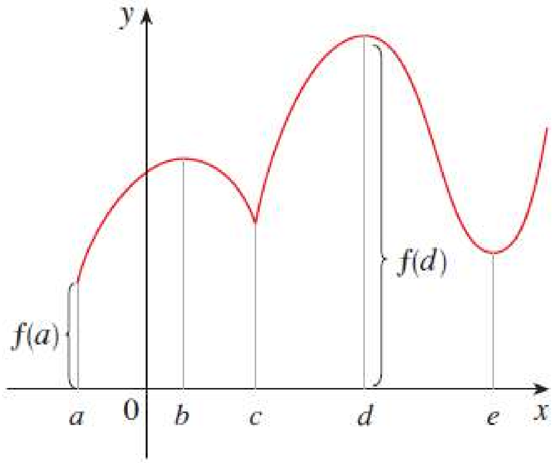


Figura 44. Representación gráfica del valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de una función f.

Definición: una función f posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en c si f(c) ≥ f(x) cuando x está cercano a c [Esto significa que f(c) ≥ f(x) para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c]. De manera análoga, f tiene un mínimo local en c si f(c) ≥ f(x) cuando x está cercano de c.

En la figura 45 se ilustra un máximo local y un mínimo local de una función f.

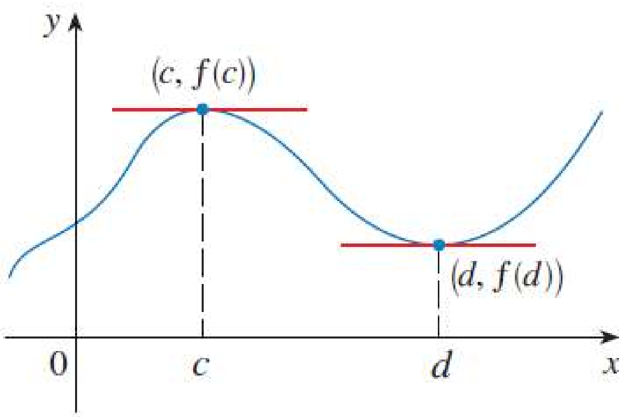


Figura 45. Representación de un máximo local y un mínimo local de una función f.

Teorema del valor extremo: Si f es continua sobre un intervalo cerrado [a, b], entonces f alcanza un valor máximo absoluto f(c) y un valor mínimo absoluto f(d) en algunos números c y d en [a, b].

En la figura 46 se ilustran tres casos de funciones continuas en un intervalo cerrado [a, b] que alcanzan sus valores máximo absoluto y mínimo absoluto.

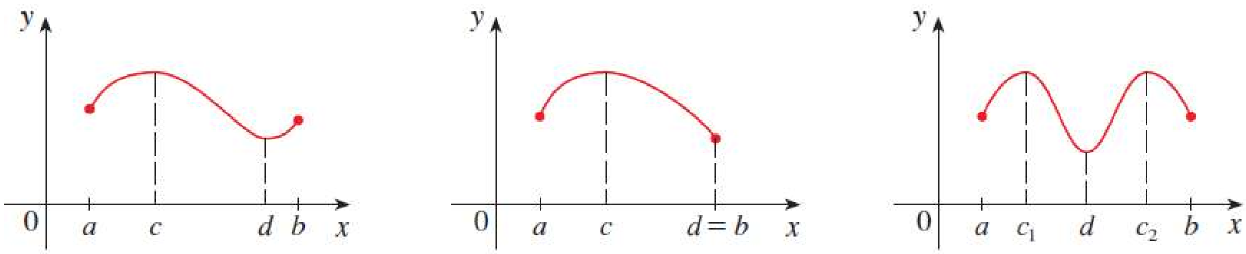


Figura 46. Ejemplos de funciones continuas en un intervalo cerrado [a, b].

En la figura 47 se muestran funciones discontinuas en el intervalo cerrado [a, b]. La primera función alcanza su valor mínimo absoluto en el punto f(2) = 0 pero no su valor máximo absoluto; mientras que la segunda función representada no alcanza ni su valor máximo absoluto ni el mínimo absoluto.

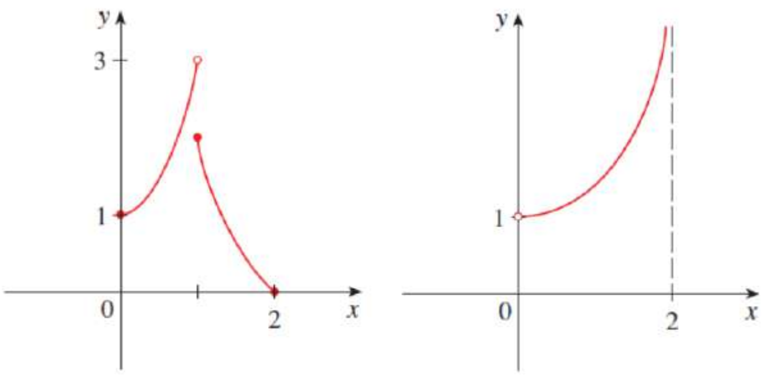


Figura 47. Ejemplos de funciones discontinuas en un intervalo cerrado [a, b].

Definición: un número crítico de una función f es un número c en el dominio de f tal que f'(c)=0 o f'(c) no existe.

Método del intervalo cerrado: Para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función f sobre un intervalo cerrado [a, b]:

1. Encuentre los valores de f sobre un intervalo cerrado [a, b].

2. Halle los valores de f en los números críticos de f en (a, b).

3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

A continuación, se muestra un ejemplo del método del intervalo cerrado.

Ejemplo

Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

Solución:

Puesto que f es continua en [-1/2; 4], se puede aplicar el método intervalo cerrado.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos de f se presentan cuando $f'(x) = 0$, es decir, x = 0 o x = 2. Observe que cada uno de estos valores críticos queda en el intervalo (-1/2; 4). Los valores de f en estos números críticos son

f(0) = 1 f(2) = –3

Los valores de f en los extremos del intervalo son

f(–1/2)= 1/8 f(4) = 17

A comparar los cuatro números resulta que el valor máximo absoluto es f(4) = 17 y el valor mínimo absoluto es f(2) = –3.

Observación: en este ejemplo el máximo absoluto se presenta en un extremo, y el mínimo absoluto se presenta en un número crítico. La gráfica de f se ilustra en la figura

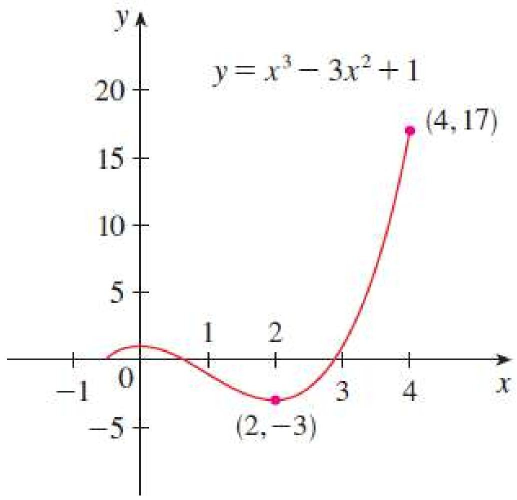


Figura 48. Representación de los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Teorema de Rolle: Si una función f(x) es continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) (en todos sus puntos interiores) y f(a) = f(b) = 0, entonces, existe al menos un punto x = c tal que c ∈ (a, b) de manera que f'(c) = 0.

Interpretación Geométrica:

Si una función es continua en un intervalo y derivable en cada punto interior del mismo (existe la tangente en cada uno de esos puntos), y corta al eje "x" (f(a) = f(b) = 0) en puntos extremos, entonces existirá al menos un punto interior x = c (a < c < b), en el cual la tangente a la curva es paralela al eje "x" (f'(c) = 0) (Ver figura 49).

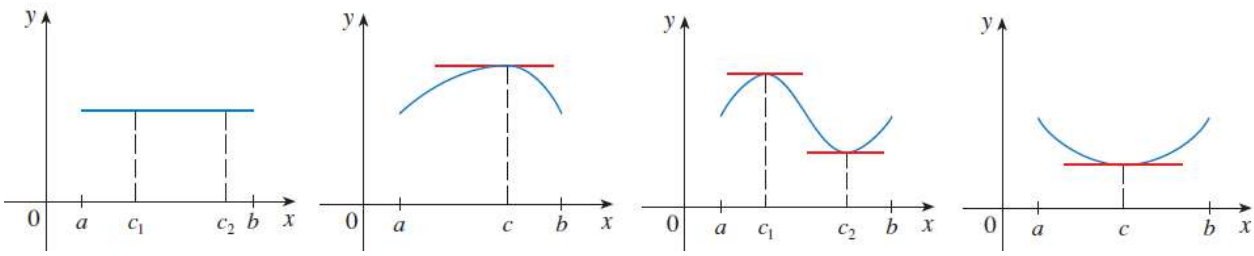


Figura 49. Representación de casos donde la derivada de una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en el intervalo (a, b) se anula.

Teorema del valor medio: Sea f una función que cumple con las hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado [a, b].

2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces hay un número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

o, en forma equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

El teorema expresa que el gráfico de una función f(x) continua en [a, b] y derivable en (a, b), tiene al menos un punto x = c con c∈(a, b), tal que la tangente a la curva en este punto es paralela a la secante que pasa por A (a, f(a)) y B (b, f(b)) (Ver figura 50).

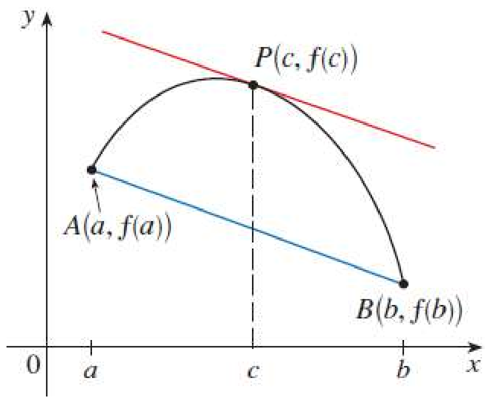


Figura 50. Representación geométrica genérica del teorema del valor medio.

Prueba creciente/decreciente:

a) Si $f'(c) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

b) a) Si $f'(c) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

En la figura 51 se ilustra geométricamente lo expresado en la prueba creciente/decreciente.

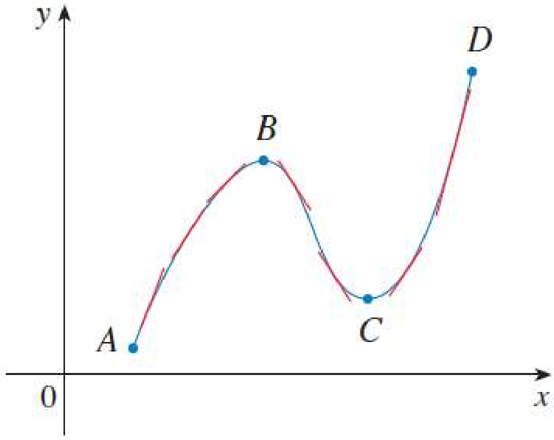


Figura 51. Representación geométrica de intervalos crecientes/decrecientes de una función con derivadas positivas y negativas por intervalos.

La prueba de la primera derivada es consecuencia de la prueba creciente/decreciente.

Prueba de la primera derivada: Suponga que c es un número crítico de una función f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' cambia de signo en c (es decir, f es positiva en ambos lados de c, o negativa en ambos lados), entones f no tiene ni máximo ni mínimo locales en c.

Para recordar la prueba de la primera derivada, observe los diagramas de la figura 52.

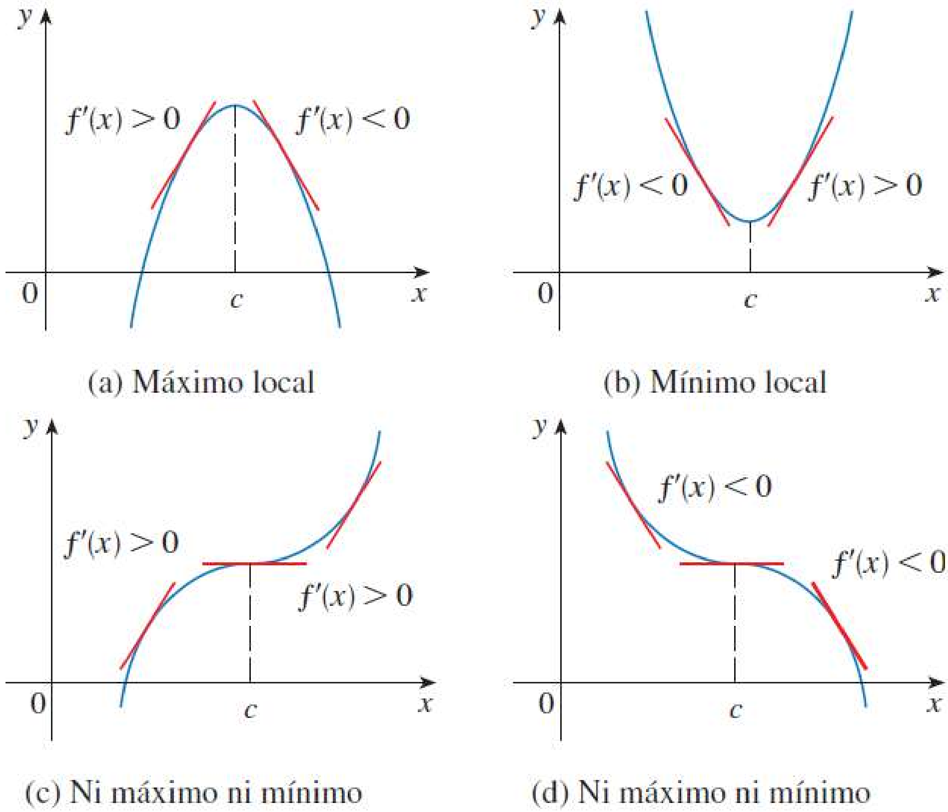


Figura 52. Representación de casos donde hay cambios de crecimientos en la derivada.

Definición: Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus tangentes en un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f queda por debajo de todas sus tanjentes en I, se dice que es **cóncaba hacia abajo** en I.

En la figura 54 se ilustran dos casos de concavidad a) hacia arriba y b) hacia abajo. Se ilustra cómo la gráfica de la función queda por arriba y por debajo de las tangentes, respectivamente.

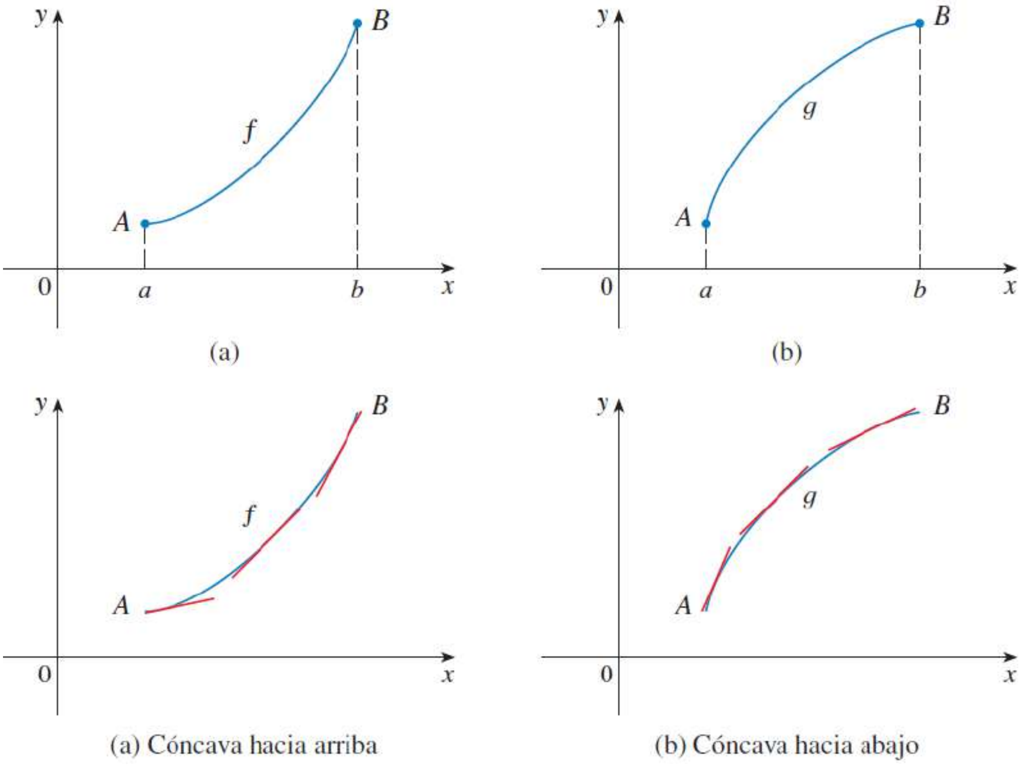


Figura 54. Concavidad hacia arriba y hacia abajo y posición de las tangentes.

En consecuencia, sobre la base de la definición anterior es posible plantear la prueba de la concavidad.

Prueba de concavidad:

a) Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

b) Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

Definición: Un punto P en una curva y = f(x) recibe el nombre de punto de inflexión si f es continua en dicho punto y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo hacia cóncava hacia arriba en P.

Sobre la base de esta definición es posible formular la prueba de la segunda derivada.

Prueba de la segunda derivada: Suponga que f″ es continua cerca de c.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

En la figura 55 se ilustra el caso a) de la prueba de la segunda derivada, en este caso la función f tiene un mínimo relativo en el punto c.

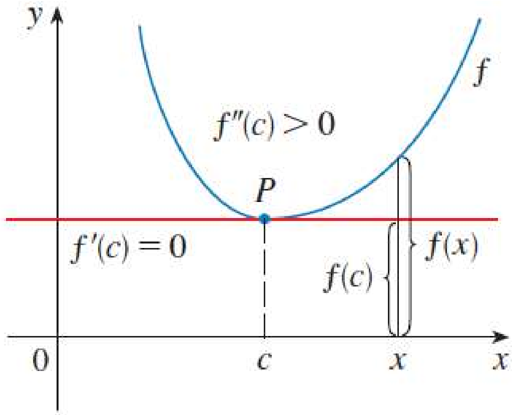


Figura 55. Función cóncava hacia arriba que tiene un mínimo en el punto c.

Ejemplo

Analice la función $f(x) = x^4 - 4x^3$ con respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Use esta información para dibujar la curva.

Solución:

Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 (x-3)$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x (x-2)$

Los números críticos se obtienen cuando $f'(x) = 0$. Por lo que se obtienen $x = 0$ y $x = 3$.

Al aplicar la prueba de la segunda derivada se evalúa la segunda derivada en los puntos críticos:

$f''(0) = 0$

$f''(3) = 36 > 0$

$f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$ es un mínimo local.

Dado que $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no brinda información acerca del número crítico 0. Pero como $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada dice que la función *f* no tiene máximo ni mínimo locales en 0. (La expresión de *f*(x) muestra que f decrece a la izquierda de 3 y se incrementa a la derecha de 3).

Como $f''(x) = 0$ o 2, se puede dividir la recta real en intervalos con estos números como puntos extremos y de este modo completar la siguiente tabla.

Intervalo	**f''(x) = 12x (x – 2)**	**Concavidad**
$(-\infty, 0)$	+	hacia arriba
(0, 2)	-	hacia abajo
$(2, \infty)$	+	hacia arriba

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, ya que la curva cambia allí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. Asimismo, (2, -16) es un punto de inflexión, puesto que la curva cambia allí de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Con el uso del mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión se dibuja la figura 56.

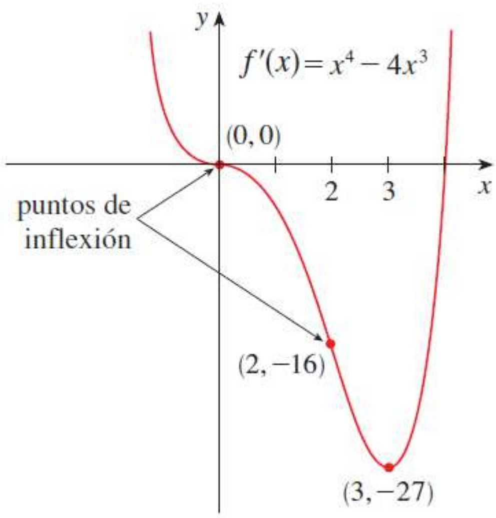


Figura 56. Representación gráfica de la función *f*(x) = $x^4 - 4x^3$.

3.3.3 Problemas de Optimización

Los métodos para hallar valores extremos que hemos aprendido en esta conferencia tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Existe infinidad de situaciones en que se desea encontrar los valores extremos de una función, por ejemplo para minimizar costos (o en su lugar maximizar ganancias). En la solución de esos problemas prácticos, el desafío más grande suele ser convertir el problema, definido en forma textual, en un problema matemático de optimización, por tanto consideramos prudente sugerir al estudiante los siguientes pasos para la solución de estos problemas:

1. **Comprenda el problema**. El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama**. En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. **Introduzca notación**. Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos (a, b, c, x ó y) para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar el uso de iniciales como símbolos sugerentes; por ejemplo A para el área, t para el tiempo.
4. **Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3**.
5. **Hallar relaciones entre las variables.** Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre las variables. Use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de y, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.

6. **Hallar el valor máximo o mínimo absoluto.** Aplique los resultados mostrados para hallar el valor máximo o el valor mínimo absoluto de $f(x)$.

Ejemplos

1. Una lata cilíndrica sin tapa se hace para contener V cm^3 de líquido. Halle las dimensiones que minimizarían el costo del metal usado.

Solución:

Las dimensiones de la lata se expresan por su altura h y su radio r. Para minimizar el costo del metal usado debemos minimizar el área superficial del cilindro (fondo y lados). Los lados del cilindro se pueden hacer con una chapa rectangular de base $2\pi r$ y altura h. Por otra parte el fondo de la lata tiene un área igual a πr^2. De manera que el área total que debemos minimizar es:

$$A = 2\pi rh + \pi r^2$$

Esta función depende de dos variables; del radio del cilindro r y de su altura h. Para eliminar una de ellas usaremos la condición de que el volumen total de la lata debe ser igual a V cm^3. Como el volumen de un cilindro es igual a $\pi r^2 h$ obtenemos la relación $\pi r^2 h = V$ que permite eliminar una de estas dos variables. Tomemos $h = \frac{V}{\pi r^2}$ y el área quedará expresada de acuerdo a:

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{2V}{r} + \pi r^2$$

Para hallar los puntos críticos de la función derivamos

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = \frac{2V}{r^2} + 2\pi r = \frac{2V + 2\pi r^3}{r^2}$$

Entonces $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = V$, de modo que el único punto crítico es $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Observe que en el punto $r = 0$ la derivada no existe pero este valor no puede considerarse crítico ya que no pertenece al dominio de la función $A(r)$. Es fácil ver

$A'(r) < 0$ cuando $r < r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ y que $A'(r) > 0$ cuando $r > r_0$, de manera que la función $A(r)$ es decreciente a la izquierda del punto crítico y creciente a la derecha del mismo. De este modo en $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ debe encontrarse el punto de mínimo absoluto de la función. El valor de h correspondiente a r_0 sería:

$$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{(V/\pi)^2}} = \frac{V/\pi}{\sqrt[3]{(V/\pi)^2}} = \sqrt[3]{V/\pi} = r_0$$

Por consiguiente, a fin de minimizar el costo, el radio de la lata debe ser igual a su altura e igual a $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

2. Mostrar que de todos los triángulos isósceles con un perímetro conocido el de mayor área es el equilátero.

Representemos mediante "a" la longitud de la base del triángulo isósceles y mediante "b" la longitud de los dos lados iguales. El área A del triángulo se puede determinar por la fórmula:

$$A = \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \ a^2/4}$$

El área A depende de a y de b. Para eliminar la dependencia de una de estas variables utilizaremos la condición de que el perímetro p es igual a $2b+a$ de donde obtenemos que $b = (p - a)/2$. Reemplazando en la fórmula del área obtenemos

$$A(a) = \tfrac{1}{2}a\sqrt{(p-a)^2/4 - a^2/4} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{(p-a)^2 - a^2} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{p^2 - 2pa}$$

Para hallar los puntos críticos de la función derivamos

$$A'(a) = \frac{dA}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{p^2 - 2pa} + \frac{1}{4}a\frac{-2p}{2\sqrt{p^2 - 2pa}} = \frac{1}{4}\frac{p^2 - 2pa \quad ap}{\sqrt{p^2 - 2pa}} = \frac{1}{4}\frac{p^2 - 3pa}{\sqrt{p^2 - 2pa}}$$

Entonces $A'(a) = 0$ cuando $a = p/3$, de modo que tenemos un punto crítico es $a_1 = p/3$ Observe que en el punto $a = p/2$ la derivada no existe y pertenece al dominio de la función por lo que también tenemos un segundo punto crítico $a_2 = p/2$.

Analizando el signo de la derivada $A'(a)$ en un entorno de $a_1 = p/3$ observamos que la misma varía de positiva a negativa, por lo que a_1 es un punto de máximo local. Evaluemos la función para los dos puntos críticos:

$$A(p/3) = \frac{1}{4}\frac{p}{3}\sqrt{p^2 - 2p^2/3} = \frac{1}{12}p^2\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}p^2$$

$$A(p/2) = \frac{1}{4}\frac{p}{2}\sqrt{p^2 - 2p^2/2} = 0.$$

Por tanto el punto de máximo absoluto del área es $a_1 = p/3$. La longitud b de los otros dos lados se obtiene a partir de $b = (p - a)/2$ y obviamente es igual a $p/3$. Con esto queda demostrado que el triángulo isósceles de mayor área con un perímetro dado es el equilátero (a = b).

3.3.4 Ejemplos de aplicaciones de la derivada a la economía

A continuación, se presentan algunas aplicaciones de la derivada a problemas de la economía.

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 5 + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + x}$

b) $y = 3x^2 + xe^x - \ln(x^2 + 3) + x/5$

c) $y = (x^3 + 3)^2 + x^x - \operatorname{sen} x^3$

Solución:

a) $y = 5 + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(5)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + x}\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x)}{2\sqrt{x^2 + x}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

b) $y = 3x^2 + x.e^x - \ln(x^2 + 3) + x/5$

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(x^2) + x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) - \frac{\frac{d}{dx}(x^2+3)}{x^2+3} + \frac{1}{5}\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 3(2x) + xe^x + e^x - \frac{2x}{x^2+3} + 1/5$$

$$= 6x + xe^x + e^x - \frac{2x}{x^2+3} + 1/5$$

c) $y = (x^3+3)^2 + x^x - \text{sen } x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3+3)^2 + \frac{d}{dx}(x^x) - \frac{d}{dx}(\text{sen } x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^3+3)\frac{d}{dx}(x^3+3) + x.\,x^{x-1}\frac{d}{dx}(x) + x^2 \ln x\frac{d}{dx}(x) - \cos x^3\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 2(x^3+3)(3x^2) + x.x^{x-1} + x^x \ln x - (3x^2)\cos x^3$$

$$= 6x^2(x^3+3) + x^x + x^x \ln x - (3x^2)\cos x^3$$

2. Crecimiento de la población. Durante el período de 10 años, de 1990 al 2000, la población de cierto país estaba dada por la fórmula: $P(t)=1+0.03t+0.001t^2$, donde P está en millones y t es el tiempo medido en años desde el inicio de 1990. Calcule la tasa de crecimiento instantánea al inicio de 1995.

Solución:

La tasa de cambio instantánea para un tiempo t está dada por:

$P'(t) = 0.03 + 0.002t$

Evaluando para t = 5, tenemos:

$P'(5) = 0.03 + 0.002(5)$

$= 0.03 + 0.01$

$= 0.04$

Por tanto, al inicio de 1995, la población de la ciudad estaba creciendo a una tasa de 0.04 millones por año, es decir, 40 000 por año.

3. Ingreso marginal. Si la función de ingreso de una empresa es $I(x) = 10x - 0.01x^2$, donde x es el número de artículos vendidos, determine el ingreso marginal. Evalúe el ingreso marginal cuando x = 200.

Solución:

El ingreso marginal cuando se vende un número arbitrario x de artículos, viene dado por:

$I'(x) = 10 - 0.01\,(2x) = 10 - 0.02x$

Si x = 200, obtenemos un ingreso marginal de:

$I'\,(200) = 10 - 0.02\,(200) = 10 - 4 = 6$

Así que, cuando se venden 200 artículos, cualquier incremento pequeño en las ventas provoca un aumento en los ingresos de aproximadamente $6.00 por artículo.

4. Utilidad Marginal. La función ingreso de una empresa viene dada por $I\,(x) = px$, donde p es el precio por artículo y x es el número de artículos vendidos, existiendo en general una relación entre x y p caracterizada por la ecuación de demanda. Mientras más artículos pueda vender la empresa, más bajo puede fijar el precio y entre más alto se fije el precio, será menor en general, el volumen de las ventas.

La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 80 - 0.1\,x$ y la función de costo es $c(x)= 5000 + 20x$.

Calcule la utilidad marginal cuando:

a) Se produzcan y venden 150 unidades.

b) Se produzcan y vendan 400 unidades.

Solución:

La función ingreso está dada por $I(x) = px = (80 - 0.1x)x = 80\,x - 0.1x^2$

Por tanto, la utilidad generada por la producción y venta de x artículos está dada por:

$U(x) = I(x) - C(x)$

$= (80x - 0.1x^2) - (5000 + 20x)$

$= 80x - 0.1x^2 - 5000 - 20x$

$= 60x - 0.1x^2 - 5000$

La utilidad marginal es la derivada U' (x)= 60 – 0.2x.

Si x =150, obtenemos U' (150) = 60 –0.2 (150) = 30. Así pues, cuando se producen 150 artículos, la utilidad marginal (esto es, la utilidad extra por artículo adicional) cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad es $30.00.

Cuando x = 400, la utilidad marginal es U' (400) = 60 – (0.2) (400)= –20.

Por tanto, si se producen 400 unidades, un pequeño incremento en la producción da como resultado una pérdida de $20.00 por unidad adicional.

5. Costo promedio marginal. Sea C(x) la función de costo de cierto artículo (costo de fabricar y vender una cantidad x del artículo en cuestión). La derivada C' (x) proporciona el costo marginal. La razón C(x)/x es igual al costo total dividido entre la cantidad producida y de esta manera representa el costo promedio por unidad de artículo producida. La derivada de esta razón con respecto a x se denomina costo promedio marginal; da el incremento en el costo promedio por artículo por cada incremento unitario en la cantidad producida.

Así tenemos que:

Costo promedio marginal = $\dfrac{d\left[\dfrac{C(x)}{x}\right]}{dx} = \overline{C}'$

$$\overline{C}'(x) = \frac{x\dfrac{d}{dx}\left[C(x)\right] - C(x)\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

$$\overline{C}'(x) = \frac{C'(x) - \dfrac{C(x)}{x}}{x^2} = \frac{1}{x}\left(C'(x) - \overline{C}(x)\right)$$

Observe que el *costo promedio marginal* es igual al costo marginal menos el costo promedio dividido ambas cantidades entre la cantidad producida. Además, el costo promedio marginal es cero cuando el costo marginal y el costo promedio son iguales.

a) Calcule el costo promedio marginal para la siguiente función de costo:

$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$ cuando $x = 100$

Solución:

$C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$

Luego al evaluar tenemos que:

$C'(100) = 0.003(100)^2 - 0.6(100) + 40$

$=30 - 60 + 40 = 10$

$C(100) = 0.001(100)^3 - 0.3(100)^2 + 40(100) + 1000$

$=1000 - 3000 + 4000 + 1000 = 3000$

En consecuencia, el costo promedio marginal cuando $x = 100$ es:

$$\overline{C}'(x) = \frac{C'(x) - \frac{C(x)}{x}}{x} = \frac{10\,\frac{3000}{100}}{100} = -0.2$$

Así, en el caso estudiado, cuando $x = 100$ el costo promedio por unidad decrece en 0.2 por cada unidad adicional producida.

6. Publicidad y ganancias. Cierto producto puede fabricarse y venderse con una ganancia unitaria de \$10.00. Si el fabricante gasta x dólares en publicidad, el número de unidades del producto que pueden venderse será igual a $1000(1- e^{-kx})$, en donde $k=0.001$. Si G representa la ganancia neta por las ventas, calcule du/dx e interprete esta derivada. Evalúe du/dx para $x = 1000$ y cuando $x = 3000$.

Solución:

Puesto que cada unidad produce una ganancia de \$10.00, la ganancia bruta total originada por el número de artículos vendidos, se obtiene, multiplicando el número de artículos vendidos por \$10.00. Restando los costos de publicidad se obtiene entonces la ganancia neta:

$G(x) = 10\,000\,(1 - e^{-kx}) - x = 10\,000 - 10\,000e^{-kx} - x$

Por tanto:

$du/dx = -10\,000\ \frac{d}{dx}(e^{-kx} - 1)$

$= -10\,000e^{-kx}\ d(-kx) - 1$

$= -10\,000e^{-kx}\ (-k) - 1 = 10\,000k.e^{-kx} - 1$

Dado que $k = 0.001$

$du/dx = 10e^{-0.001x} - 1$

Esta derivada se puede interpretar como la tasa de cambio de la ganancia neta con respecto a los gastos de publicidad, es decir, el número de dólares de ganancia neta producida por un gasto adicional unitario (en dólares) realizado en publicidad.

Cuando $x = 1000$

$du/dx = 10e^{-1} - 1 = 10\,(1/e) - 1 = 10\,(0.3679) - 1 = 3.679 - 1 = 2.679$

Esto significa que si se gastan \$1000 en publicidad, cada dólar adicional produce un incremento aproximado de \$2.68 en la ganancia neta.

Si $x = 3000$

$du/dx = 10(e^{-3}) - 1 = 10\,(0.0498) - 1 = 0.498 - 1 = -0.502$

Por tanto, cuando se gastan \$3000 en publicidad, cada dólar adicional gastado en este rubro, produce una disminución de \$0.50 en la ganancia neta. En este caso el empresario no debería hacer más publicidad, (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando x = 3000, ya se está gastando de más en publicidad y sería necesario buscar cuando se produce el máximo efecto por cada dólar gastado. Esto será objeto de estudio más adelante en este libro.

3.4 Ejercicios del capítulo

En esta sección los estudiantes deben poner en práctica sus conocimientos y desarrollar sus habilidades para comprender los ejercicios y problemas que se presentan, así como para resolver aquellos que se les proponen.

3.4.1 Ejercicios resueltos

1. Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^5}$

c) $f(x) = (x+1)\ln x$

d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$

e) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Soluciones:

a) $\frac{d\left(\sqrt{x}(x+1)\right)}{dx} = \frac{(x+1)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$ (se aplica la regla del producto)

b) $\frac{d\left(\frac{x+1}{x^5}\right)}{dx} = \frac{x^5-(x+1)5x^4}{x^{10}} = x^4\left[\frac{x-(x+1)5}{x^{10}}\right] = \frac{x-(x+1)5}{x^6} = \frac{-4x-5}{x^6}$ (se aplica la regla del cociente)

c) $\frac{d((x+1)\ln x)}{dx} = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + \frac{1}{x} + 1$ (se aplica la regla del producto)

d) $\frac{d\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)}{dx} = \frac{2x(x^3)-(x^2+1)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{2x^4-3x^4-3x^2}{x^6} = \frac{-x^4-3x^2}{x^6} = \frac{-x^2-3}{x^4}$ (se aplica la regla del producto)

e) $\frac{d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)}{dx} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \left(1-\frac{\ln x}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$ (se aplica la regla del cociente)

2. Calcule los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}$

Soluciones:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Se verifica la indeterminación del tipo 0/0

Se aplica la regla de L' Hôpital y se deriva el numerador y el denominador.

Se obtiene $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$

b) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}$

Se verifica la indeterminación del tipo 0/0

Se aplica la regla de L' Hôpital y se deriva el numerador y el denominador.

Se obtiene $\lim_{x\to 4}\frac{2x}{\frac{2}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 4} x\sqrt{x} = 8$

3. Determinar por el método de la primera derivada si existen los valores extremos de la función $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Solución:

1. Se calcula la primera derivada, obteniéndose:

$$y' = (x-1)(\sqrt[3]{x^2}) + (\sqrt[3]{x^2})(x-1)' = (x-1)\frac{(x^2)'}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}} + \sqrt[3]{x^2} = (x-1)\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}} + \sqrt[3]{x^2}$$

$$y' = \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} = \frac{2(x-1) + (\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2x-2+3x}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2. Cálculo de los valores críticos (condición necesaria para la existencia de extremos).

   a) Se hallan los valores de la variable independiente para los cuales se anula la primera derivada (f'(x)= 0), o sea y' $= \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$, cuando $5x - 2 = 0$, así $x_0 = 2/5$ es un punto crítico.

b) Se determinan los valores de la variable independiente para los cuales no existe la primera derivada ($f'(x)=\infty$), siendo continua la función, o sea $y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=\infty$ cuando $3\sqrt[3]{x}=0$, así $x_1 = 0$ es un punto crítico.

3. Se analiza el comportamiento del signo de la primera derivada en cada punto crítico encontrado, tanto a la izquierda como a la derecha de cada punto crítico.

Como $f'(x) < 0$ para $x< 2/5$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2/5$, se dice que $f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = 2/5$.

De manera análoga, como $f'(x) > 0$ para $x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $x > 0$, se dice que $f(x)$ presenta un máximo relativo.

4. Se calculan los valores de la función para cada punto crítico encontrado, así

$$f(2/5)= \left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

por lo que $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right)$ es el punto de mínimo relativo.

De la misma manera $f(0) = (0 - 1)\sqrt[3]{0} = 0$, por lo que $(0,0)$ es el punto de máximo relativo.

Partiendo del análisis anterior, el gráfico aproximado de la función es el de la figura 57.

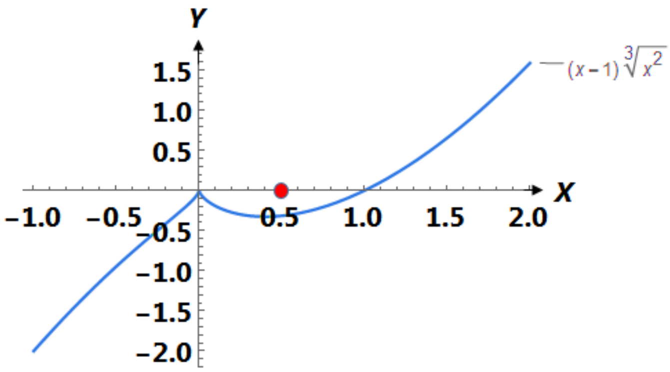


Figura 57. Representación gráfica de la función $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$.

4. Determine, si existen, los valores extremos de la función $y = 1/3x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ por el método de la segunda derivada.

Solución:

1. Hallando la primera derivada: $y' = x^2 - 4x + 3$

2. Calculando los valores críticos.

   Se buscan los valores de la variable independiente para los cuales $f'(x) = 0$. Es necesario señalar, que el segundo método para determinar extremo, *solo es aplicable* en el caso en que la función sea derivable, es decir, $f'(x) = 0$ (puntos estacionarios). En este caso, se tiene que

   $f'(x) = 0$ cuando $x^2 - 4x + 3 = 0$.

   Factorizando, se llega a $(x-1)(x-3) = 0$, por consiguiente $x_0 = 1$; $x_1 = 3$ son los valores críticos.

3. Analizando el signo de la segunda derivada para cada punto crítico encontrado.

La segunda derivada de la función es $y'' = 2x - 4$. Analizando su signo para $x = 1$, o sea $f''(1) = 2(1) - 4 = -2 < 0$, por lo que $x = 1$ determina un máximo relativo.

Por otra parte, para $x = 3$, tenemos: $f''(3) = 2(3) - 4 = 2 > 0$, por lo que $x = 3$ determina un mínimo relativo.

4. Calculando los valores de la función para cada punto crítico encontrado, como sigue:

   $f(1) = 1/3(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 - 2 + 3 + 1 = 7/3$

   Se concluye que (1, 7/3) es un punto de máximo relativo.

   De la misma manera:

   $f(3) = 1/3\ (3)^3 - 2\ (3)^2 + 3\ (3) + 1 = 1/3(27) - 2(9) + 9 + 1 = 1$

Por lo que (3,1) es un punto de mínimo relativo.

El gráfico aproximado de la función es el de la figura 58.

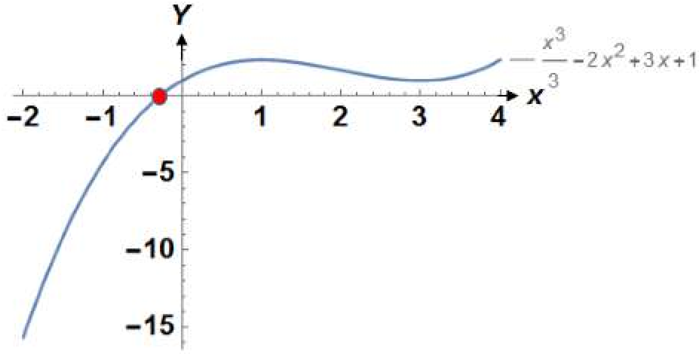


Figura 58. Representación gráfica de la función y = (x – 1) $\sqrt[3]{x^2}$

5. Hallar dos números positivos cuya suma sea 16 y cuyo producto sea el máximo posible.

Solución:

Sean x, y los números que su suma es igual a 16: $x + y = 16$

Entonces el producto de x, y es la función: $f(x, y) = x \cdot y$

Como $y = 16 - x$ dicha función puede transformarse en la función: $f(x) = 16x - x^2$

Luego, su derivada es: $f'(x) = 16 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8$

La segunda derivada es: $f''(x) = -2 < 0 \;\; \forall x$

Luego, $x = 8$ es un máximo, como la suma de los números es 16, se determina que: $y = 8$

Respuesta: la pareja de números que su producto es máximo son $x = y = 8$, siendo su producto máximo: 64

6. La "Empresa Alimentos del Caribe" puede producir x toneladas métricas (TM) de compotas por día así como y TM de mermelada por día, siendo y = (40– 5x) / (10–x). Si el precio de la mermelada es la mitad del de la compota, demostrar que el máximo beneficio se obtiene produciendo alrededor de 5,5 TM diarias de mermelada.

Solución:

Datos:

x: Cantidad de TM que puede producir al día de mermelada.

Y: Cantidad de TM que puede producir al día de compota.

P: Precio de la TM de mermelada.

2P: Precio de la TM de compota.

Y = (40 – 5x) /(10 – x)

La incógnita a despejar será la variable independiente del problema, en este caso es x.

La función objetivo a optimizar se debe construir de la siguiente forma:

En primer lugar se construye la función I que es la función de ingreso total la cual sería

I = px + 2py

Pero como y = (40 – 5x) / (10 – x), sustituyendo en la función de ingreso total se tiene

I = px + 2p (40 – 5x) / (10 – x)

A partir de esta función se calcula I', obteniéndose

$$I' = p + 2p\frac{(10-x)(-5)-(40-5x)(-1)}{(10-x)^2}$$

$$I' = p + 2p\frac{-50+5x+40-5x}{(10-x)^2} = p + 2p\frac{-10}{(10-x)^2}$$

$$I' = \frac{p(10-x)^2 - 20p}{(10-x)^2}$$

Para determinar los valores críticos, se resuelve la ecuación I'(x) = 0, es decir

$$\frac{p(10-x)^2 - 20p}{(10-x)^2} = 0$$

Se cumplirá para $p(10 - x)^2 - 20p = 0$ y como p es una constante positiva, tendremos

$x^2 - 20x + 80 = 0$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $x_1 = 14.46$ y $x_2 = 5.54$ que son los valores críticos.

Para demostrar que para $x_2 = 5.54$ hay un máximo por el método de la primera derivada, se evalúa para los valores enteros inmediatos por encima y por debajo de dicho valor, obteniéndose que $I'(5) > 0$ y $I'(6) < 0$, por lo que queda demostrado que para una producción de aproximadamente 5.5 TM de mermelada se obtiene el beneficio máximo.

Observación: La consideración de que p es una constante positiva en el problema (precio), pudo haberse hecho desde el análisis inicial para la determinación de extremos, eliminándose y obteniendo el mismo resultado.

7. Un establecimiento industrial produce x docenas de cierto artículo diariamente con un costo total de $c = 3x^2 + 8x + 1$ pesos. Si el precio de venta de una docena es $p = 120 - x$. Hallar el nivel de producción necesario para obtener una ganancia máxima.

Solución

Datos:

x: Cantidad de docenas del artículo que pueden producirse diariamente

El costo total en pesos está dado por $Ct = 3x^2 + 8x + 1$

El precio de venta por docena es $P = 120 - x$

La incógnita cuyo valor es necesario encontrar es el de la variable independiente del problema: x

La función objetivo o función a optimizar es

Ganancia = Ingreso Total – Costo Total

$$G(x) = px - Ct$$

$$= (120 - x)\,x - (3x^2 + 8x + 1)$$

$= 120x - x^2 - 3x^2 - 8x - 1$

$= -4x^2 + 112x - 1$

Para determinar los valores críticos, se resuelve la ecuación dada por G'(X) = 0, es decir,

$$G'(x) = -8x + 112 = 0$$

Cuya solución es x = 14 (valor crítico).

Para demostrar que para x = 14 docenas del artículo la función tiene un máximo, puede emplearse el método de la segunda derivada. Así se tiene que G"(x) = –8, evaluando el valor crítico encontrado, tenemos que G"(x) < 0, por lo que efectivamente x = 14 determina un máximo.

3.4.2 Ejercicios propuestos

1. Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$

b) $y = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$

c) $y = \frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$

d) $y = \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{5}{(2x+1)^2}$

e) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

f) $y = x^4e^x$

g) $y = \frac{x^2}{1+2x}$

h) $g(t) = \frac{1}{(t^4+1)^3}$

i) $F(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

j) $y = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$

2. Calcular los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

e) $\lim_{x \to 0^+} x^x$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x \to \infty} (x - \ln x)$

3. Calcule los valores máximos y mínimos absolutos de la función f(x) = $x^3 - 3x^2 + 1$.

4. Un granjero tiene 2400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

3.5 Recursos tecnológicos y didácticos

A continuación, se presentan algunos recursos tecnológicos y didácticos que pueden ser útiles tanto para estudiantes como para profesores al estudiar y enseñar el contenido de cálculo diferencial. Estos recursos pueden ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos y facilitar la resolución de problemas.

2.5.1 Recursos tecnológicos

Software de cálculo simbólico: Utiliza programas de software de cálculo simbólico como Mathematica, Maple o Sympy para realizar cálculos complejos, simplificar expresiones y resolver ecuaciones diferenciales. Estas herramientas pueden ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos y realizar cálculos de manera más eficiente.

Aplicaciones móviles: Recomienda a tus estudiantes aplicaciones móviles relacionadas con el cálculo diferencial, como Calculus Made Easy, Wolfram Alpha o Symbolab. Estas aplicaciones brindan soluciones paso a paso, ejercicios prácticos y recursos adicionales para el aprendizaje autónomo.

Herramientas de visualización: Utiliza software interactivo de visualización matemática, como GeoGebra o Desmos, para mostrar gráficos dinámicos y animaciones que ilustren conceptos y propiedades del cálculo diferencial. Estas herramientas permiten a los estudiantes explorar y experimentar con diferentes funciones y sus derivadas.

Plataformas en línea: Aprovecha plataformas en línea como Khan Academy, Coursera o edX, que ofrecen cursos y recursos relacionados con el cálculo diferencial. Estas plataformas proporcionan lecciones en video, ejercicios interactivos y evaluaciones para que los estudiantes puedan aprender y practicar los conceptos a su propio ritmo.

Simulaciones interactivas: Busca simulaciones interactivas en línea que permitan a los estudiantes experimentar con conceptos y procesos del cálculo diferencial. Estas simulaciones les brindarán una comprensión más profunda a través de la exploración activa y la interacción con los diferentes elementos de la simulación.

3.5.2 Recursos didácticos

1. **Ejercicios prácticos**: crea una serie de ejercicios prácticos que aborden los conceptos clave del cálculo diferencial. Puedes incluir problemas de aplicación, ejemplos concretos y desafíos matemáticos para que los estudiantes practiquen y apliquen los conceptos aprendidos.
2. **Ejemplos visuales**: Utiliza gráficos, diagramas y representaciones visuales para ilustrar los conceptos y procesos del cálculo diferencial. Esto ayudará a los estudiantes a comprender mejor las ideas abstractas al visualizar cómo funcionan en situaciones concretas.
3. **Proyectos de investigación**: Propón proyectos de investigación en los que los estudiantes puedan explorar y aplicar conceptos de cálculo diferencial en situaciones del mundo real. Por ejemplo, podrían investigar cómo se modela el movimiento de un objeto utilizando derivadas y analizar diferentes aplicaciones de la derivada en campos como la física, la economía o la biología.
4. **Debates y discusiones en clase**: Fomenta debates y discusiones en clase sobre temas relacionados con el cálculo diferencial. Presenta preguntas desafiantes que requieran razonamiento y argumentación para que los estudiantes profundicen en su comprensión de los conceptos y desarrollen habilidades de pensamiento crítico.
5. **Tutoriales en línea**: Crea materiales de aprendizaje en línea, como tutoriales o guías paso a paso, que los estudiantes puedan acceder fuera del aula. Estos recursos les brindarán apoyo adicional y les permitirán repasar los conceptos y técnicas del cálculo diferencial a su propio ritmo.

Capítulo IV. CÁLCULO INTEGRAL

4.0 Introducción al capítulo

El cálculo integral es una rama fundamental de las matemáticas que se enfoca en el estudio de las integrales de las funciones y sus aplicaciones. En este cuarto capítulo, se explorará la integral indefinida y la integral definida, y se presentarán las técnicas necesarias para calcularlas.

En tal sentido, se definirá el concepto de integral indefinida y se explicará la antiderivada de una función. Se presentarán las técnicas de integración por sustitución, integración por partes e integración de funciones racionales por funciones parciales. Los recursos tecnológicos y didácticos en esta sección ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estas técnicas y a aplicarlas en la resolución de problemas.

Además, se discutirá el concepto de integral definida y se presentarán las propiedades importantes que se deben tener en cuenta al trabajar con ellas. Se explicará el teorema fundamental del cálculo y cómo se utiliza para calcular integrales definidas. También se abordará el cálculo de áreas entre curvas y se presentarán las técnicas necesarias para calcularlas. Los recursos tecnológicos y didácticos en esta sección ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estos conceptos y a aplicarlos en la resolución de problemas.

En resumen, este cuarto capítulo proporcionará una introducción completa al mundo del cálculo integral y su aplicación en la resolución de problemas. Los recursos tecnológicos y didácticos incluidos en este capítulo ayudarán a los estudiantes a comprender mejor estos conceptos y a aplicarlos en la resolución de problemas. La comprensión de estos conceptos es fundamental para el estudio de temas más avanzados en las matemáticas superiores y su aplicación en áreas como la física, la ingeniería y la economía.

4.1 Contribución a la formación de Competencias

A partir del contenido del cálculo diferencial del Capítulo III se puede contribuir a formar las siguientes competencias genéricas, matemáticas y digitales en los estudiantes.

Competencias Genéricas:

- **Pensamiento crítico y analítico**: Los estudiantes podrán analizar y comprender conceptos matemáticos relacionados con el cálculo integral, identificar relaciones entre variables y realizar razonamientos lógicos en el contexto de integrales indefinidas y definidas.
- **Resolución de problemas**: Podrán aplicar los conceptos y técnicas del cálculo integral para resolver problemas relacionados con la antiderivada de funciones, el cálculo de áreas entre curvas y la resolución de integrales definidas.
- **Habilidades de comunicación**: Podrán expresar de manera clara y precisa las ideas matemáticas relacionadas con el cálculo integral, tanto de forma oral como escrita, al explicar los conceptos y técnicas utilizados y al comunicar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- **Trabajo en equipo**: Podrán colaborar con otros estudiantes en la resolución de problemas y actividades relacionadas con el cálculo integral, fomentando la discusión y el intercambio de ideas.
- **Autonomía y autorregulación**: Podrán gestionar su propio aprendizaje en el cálculo integral, estableciendo metas y planificando su estudio de manera efectiva.

Competencias Matemáticas:

- **Comprensión de la integral indefinida**: Los estudiantes desarrollarán la capacidad de comprender el concepto de integral indefinida como la antiderivada de una función y su relación con la derivada.
- **Manipulación de expresiones matemáticas**: Aprenderán a realizar operaciones con integrales indefinidas, como determinar la antiderivada de una función, aplicar

propiedades de la integral indefinida y utilizar técnicas de integración como la sustitución y la integración por partes.

- **Interpretación y análisis de integrales definidas**: Podrán interpretar la integral definida como el área bajo una curva y utilizarla para calcular áreas entre curvas y resolver problemas relacionados con el cálculo de áreas.
- **Conocimiento de propiedades de la integral definida**: Aprenderán sobre las propiedades de la integral definida, como la linealidad, el cambio de límites de integración y la suma de integrales definidas.
- **Aplicación de la integral definida en contextos reales**: Serán capaces de aplicar la integral definida en la resolución de problemas prácticos en áreas como la física, la ingeniería y la economía, incluyendo el cálculo de áreas, volúmenes y promedios.
- **Cálculo de integrales impropias**: Desarrollarán la habilidad de calcular integrales impropias, comprendiendo el concepto de límite en el cálculo de áreas infinitas o integrales con límites infinitos.

Competencias Digitales:

- **Uso de recursos tecnológicos**: Los estudiantes podrán utilizar herramientas tecnológicas, como software de cálculo simbólico o gráficas, para explorar y visualizar integrales, realizar cálculos y resolver problemas relacionados con el cálculo integral.
- **Búsqueda y gestión de información**: Serán capaces de buscar información relevante sobre cálculo integral en fuentes digitales confiables y organizarla de manera efectiva, utilizando herramientas tecnológicas para acceder a recursos y referencias actualizadas.
- **Comunicación digital**: Podrán utilizar herramientas digitales para presentar y compartir resultados matemáticos, como gráficas o cálculos de integrales, de manera clara y comprensible, utilizando software especializado o plataformas de comunicación en línea.

- **Pensamiento computacional**: Aprenderán a abordar problemas matemáticos relacionados con el cálculo integral de manera algorítmica, utilizando herramientas digitales y la lógica computacional para diseñar estrategias de resolución.
- **Alfabetización digital**: Desarrollarán habilidades básicas relacionadas con el uso de software matemático y la comprensión de interfaces gráficas, así como la capacidad de evaluar la validez y confiabilidad de las herramientas y recursos digitales utilizados en el cálculo integral.

Estas competencias genéricas, matemáticas y digitales son relevantes para que los estudiantes adquieran un conocimiento sólido sobre el cálculo integral y puedan aplicarlo de manera efectiva en diversos contextos académicos y profesionales.

4.2 Integral indefinida

La integral indefinida es un concepto esencial en el campo del cálculo y desempeña un papel fundamental en diversas ramas de la matemática y otras disciplinas. A continuación, exploraremos el concepto de integral indefinida y su relevancia en el ámbito académico y práctico.

La integral indefinida, también conocida como *antiderivada*, permite determinar una función original a partir de su derivada. Es un proceso inverso a la diferenciación y nos brinda la capacidad de analizar el cambio acumulado o la cantidad total de una magnitud en un intervalo dado.

En este epígrafe abordaremos los fundamentos de la integral indefinida, incluyendo su definición formal y las propiedades básicas que la caracterizan. Exploraremos además los diferentes métodos de cálculo, como la sustitución y la integración por partes, proporcionando ejemplos resueltos que ayudarán a comprender su aplicación práctica.

4.2.1 *Antiderivada o primitiva de una función*

Definición de Integral Indefinida:

La integral indefinida de una función f(x) se denota como $\int f(x)\,dx$ y se define como una familia de funciones F(x) que tienen la propiedad de que su derivada es igual a f(x), es decir, F'(x) = f(x) para todo x en el dominio de f(x).

La integral indefinida es una operación matemática que nos permite encontrar una función F(x), conocida como antiderivada o primitiva de f(x), a partir de una función dada f(x). La notación $\int f(x)\,dx$ representa la integral indefinida de f(x) con respecto a x.

La definición formal establece que la antiderivada F(x) debe cumplir la propiedad de que su derivada F'(x) sea igual a la función original f(x). Esto implica que la integral indefinida deshace el proceso de derivación, devolviéndonos una función en lugar de una tasa de cambio.

En otras palabras, calcular la integral indefinida de una función implica encontrar una expresión para F(x) tal que al derivarla obtengamos nuevamente la función f(x) original. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la integral indefinida no proporciona una única solución, sino una familia infinita de funciones que difieren solo por una constante arbitraria.

Ejemplos

1. Calcular la integral indefinida de $f(x) = 3x^2\,dx$.

   Solución: Aplicamos la regla de potencias, sumando 1 al exponente y dividiendo por el nuevo exponente:

$\int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$, donde c es la constante de integración.

2. Calcular la integral indefinida de $f(x) = 2\cos(x)\,dx$.

   Solución: Utilizamos la regla de integración de funciones trigonométricas:

   $\int f(x)\,dx = \int 2\cos(x)\,dx = 2\operatorname{sen}(x) + c$, donde c es la constante de integración.

3. Calcular la integral indefinida de $f(x) = e^x\,dx$.

Solución: La función exponencial e^x es su propia antiderivada, por lo que:

$\int f(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c$, donde c es la constante de integración.

En cada ejemplo, la antiderivada encontrada satisface la condición de derivada igual a la función original, demostrando así la validez de la definición de integral indefinida.

Ejemplos de antiderivadas:

$f_{(x)} = \operatorname{sen} x \qquad F_{(x)} = \cos x + c$

$f_{(x)} = 3x^2 - 2x + 1 \qquad F_{(x)} = x^3 + x^2 + x + c$

$f_{(x)} = x^2 \qquad F_{(x)} = x^2 + 3 + c$

Observación: en todos los casos debe adicionarse una constante arbitraria que podemos denotar por c, pero en general se puede utilizar: c_1, c_2, k, k_1, k_1, p, q, r...

La función primita no es única, por ejemplo, para la función $f_{(x)} = x^2$ la función primitiva realmente es una familia de funciones $F_{(x)} = x^2 + 3 + c$, como casos particulares de esta familia tenemos las funciones $F_{(x)} = x^2 + 3$ y $F_{(x)} = x^2 + 9$.

Al aplicar la definición de integral indefinida de una función f(x) es posible encontrar las primitivas para una variedad de funciones elementales. A continuación, se resumen las mismas a través de una tabla de integrales inmediatas.

Tabla de integrales inmediatas:

1. $\int f'_{(x)} f^n{}_{(x)}\, dx = \frac{f_{(x)}^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{f'_{(x)}}{f_{(x)}} dx = \ln f_{(x)} + C$
3. $\int \frac{f'_{(x)}}{2\sqrt{f_{(x)}}} dx = \sqrt{f_{(x)}} + C$
4. $\int \frac{f'_{(x)}}{n\sqrt[n]{f_{(x)}^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f_{(x)}} + C$
5. $\int f'_{(x)} \operatorname{sen} f_{(x)}\, dx = -\cos f_{(x)} + C$
6. $\int f'_{(x)} \cos f_{(x)}\, dx = \operatorname{sen} f_{(x)} + C$
7. $\int f'_{(x)} \tan f_{(x)}\, dx = \ln\left|\sec f_{(x)}\right| + C = -\ln\left|\cos f_{(x)}\right| + C$

8. $\int f'_{(x)} \cot f_{(x)} = \ln\left|\text{sen}\, f_{(x)}\right| + C$

9. $\int f'_{(x)} \sec f_{(x)} dx = \ln\left|\sec f_{(x)} + \tan f_{(x)}\right| + C = \ln\left|\tan \frac{f_{(x)}}{2}\right| + C$

10. $\int f'_{(x)} \csc f_{(x)}\, dx = \ln\left|\csc f_{(x)} - \cot f_{(x)}\right| + C$

11. $\int f'_{(x)} \sec^2 f_{(x)}\, dx = \tan f_{(x)} + C$

12. $\int f'_{(x)} \csc^2 f_{(x)}\, dx = -\cot f_{(x)} + C$

13. $\int f'_{(x)}\, a^{f(x)} dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + C$

14. $\int e^{f(x)}\, f'_{(x)}\, dx = e^{f(x)} + C$

15. $\int \frac{f'_{(x)} dx}{\sqrt{a^2 - f^2{}_{(x)}}} = \sin^{-1} \frac{f_{(x)}}{a} + C$

16. $\int \frac{f'_{(x)} dx}{\sqrt{a^2 + f^2{}_{(x)}}} = \sin^{-1}h \frac{f_{(x)}}{a} + C = \ln\left|f_{(x)} + \sqrt{a^2 + f^2{}_{(x)}}\right| + C$

17. $\int \frac{f'_{(x)} dx}{a^2 - f^2{}_{(x)}} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{f_{(x)}}{a} + C$

18. $\int \frac{f'_{(x)} dx}{a^2 - f^2{}_{(x)}} = \frac{1}{a} \tan^{-1}h \frac{f_{(x)}}{a} + C$

19. $\int \frac{f'_{(x)} dx}{f_{(x)}\sqrt{f^2{}_{(x)} - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{f_{(x)}}{a} + C$

20. $\int \frac{f'_{(x)} dx}{f_{(x)}\sqrt{a^2 - f^2{}_{(x)}}} = -\frac{1}{a} \sec^{-1}h \frac{|f_{(x)}|}{a} + C$

21. $\int \sqrt{x+1}dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + C$

Con ayuda de esta tabla de integrales es posible resolver una diversidad de integrales inmediatas. Sin embargo, esta diversidad puede ser mayor si se aplican las propiedades de la integral indefinida que se presenta a continuación.

4.2.2 Propiedades de la integral indefinida

Supondremos que todas las funciones en lo adelante son continuas por lo que su integral indefinida existe en un mismo intervalo (a, b). Entonces, para estas funciones se cumplen las siguientes propiedades:

1. El diferencial de una integral indefinida es igual a la expresión del integrando:

   $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

Demostración:

Ya que $F'(x) = f(x)$ para toda x de (a, b), entonces se tiene que

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d[F(x) + C] = F'(x)dx = f(x)dx.$$

2. La derivada de una integral indefinida es igual a la función integrando: $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$

La demostración de esta propiedad se desprende de la propiedad 1.

3. La integral indefinida del diferencial de una función es igual a dicha función más una constante arbitraria.

$$\int dF(x)dx = F(x) + C$$

En efecto si $F'(x) = f(x)$ para toda x de (a, b), entonces se tiene que

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4. El factor constante puede sacarse fuera del signo de la integral indefinida o ponerse bajo el signo de la integral.

$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ donde a es una constante no nula.

5. La integral indefinida de la suma algebraica de dos funciones es igual a la suma algebraica de las integrales indefinidas de estas funciones.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Demostración:

Por la propiedad 2

$$\frac{d}{dx}\int [f(x) \pm g(x)]dx = f(x) \pm g(x)$$

Por otra parte,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx = f(x) \pm g(x)$$

De esta forma

$\int [f(x) \pm g(x)]dx$ y $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ son primitivas de las mismas funciones $f(x) \pm g(x)$ por consiguiente, solo difieren en una constante y esto demuestra la propiedad.

Combinando las propiedades 4 y 5 puede demostrarse la denominada propiedad de linealidad de la integral indefinida.

6. $\int \sum_{i=1}^{n} A_i f_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i \int f_i(x)\, dx$

donde las A_i son constantes i=1, 2,..., n.

Con ayuda de estas propiedades aumenta el espectro de integrales inmediatas que pueden ser resueltas. No obstante, hay algunas integrales que necesitan de la aplicación de métodos especiales para la resolución, tal es el caso de la integración por sustitución de la variable que se presenta a continuación.

4.2.3 *Integración por sustitución de la variable*

El método de integración por sustitución, también conocido como regla de la cadena inversa, es una técnica utilizada para resolver integrales en las que se identifica una función compuesta en la expresión a integrar. Este método se basa en realizar un cambio de variable que simplifique la integral y facilite su resolución.

En otras palabras, este método se basa en realizar una sustitución adecuada introduciendo una variable auxiliar en el integrando, conjuntamente con su diferencial y se resume en el siguiente teorema:

Teorema: Sea $f(u)$ y $u = \varphi(x)$ definidas sobre ciertos intervalos, tales que tenga sentido la función compuesta $[f[\varphi(x)]$ y la función $\varphi(x)$ sea diferenciable. Entonces, si la función $f(u)$ tiene primitiva $F(u)$, es decir, si

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

la función $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ tiene como primitiva la función $F[\varphi(x)]$, es decir,

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$$

El método de integración por sustitución se basa en la regla de la cadena de la derivada. Si tenemos una función compuesta de la forma f(g(x)), la derivada de esta función se puede expresar como f'(g(x)) * g'(x).

Para resolver una integral utilizando este método, seguimos los siguientes pasos:

1. Identificar una función dentro de la expresión a integrar que sea parte de una función compuesta. Esta función se convertirá en la función u de la sustitución.
2. Calcular la derivada de u, denotada como du/dx
3. Realizar la sustitución u = g(x), lo que implica reemplazar la función identificada en el paso 1 por u y su derivada du/dx por dx en la integral original.
4. Simplificar la integral utilizando la sustitución u y du. Esto puede implicar simplificar la expresión o aplicar otras técnicas de integración.
5. Resolver la integral resultante de u utilizando métodos de integración conocidos, como la regla de potencias, la regla del logaritmo, la regla de las funciones trigonométricas, entre otros.

Finalmente, reemplazar u por la expresión original de g(x) para obtener la solución final de la integral.

A continuación, se proporcionan tres ejemplos ilustrativos de la aplicación del método de integración por sustitución.

Ejemplos

1. Calcular la integral $\int(2x + 1)^2 \, dx$

En este ejemplo, podemos realizar la sustitución u = 2x + 1

Calculamos du/dx:

du/dx = 2

Sustituimos en la integral:

$\int(2x + 1)^2 \, dx = \int u^2 \, (1/2) \, du$

Simplificamos y resolvemos la integral de u:

$(1/2)\int u^2\, du = (1/2) * (u^3/3) + c = u^3/6 + c$

Reemplazamos u por su expresión original:

$\int (2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3/6 + c$

2. Calcular la integral $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$

En este caso, podemos realizar la sustitución $u = x^2$

Calculamos du/dx:

$du/dx = 2x$

Sustituimos en la integral:

$\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \int e^u\, du$

Resolvemos la integral de u:

$\int e^u\, du = e^u + c$

Reemplazamos u por su expresión original:

$\int 2x\, e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + c$

3. Calcular la integral $\int (1 + 3x)^4\, dx$

En este ejemplo, podemos realizar la sustitución $u = 1 + 3x$

Calculamos du/dx:

$du/dx = 3$

Sustituimos en la integral:

$\int (1 + 3x)^4\, dx = (1/3)\int u^4\, du$

Resolvemos la integral de u:

$\int (1 + 3x)^4\, dx = (1/3)\int u^4\, du = (1/3) * (u^5/5) + c = u^5/15 + c$

Reemplazamos u por su expresión original:

$\int (1 + 3x)^4 \, dx = (1 + 3x)^5/15 + c$

Estos ejemplos ilustran la aplicación del método de integración por sustitución para resolver diferentes tipos de integrales. Es importante practicar y tener en cuenta que la elección adecuada de la sustitución puede facilitar significativamente la resolución de la integral.

4.2.4 *Integración por partes*

El método de integración por partes es una técnica utilizada para resolver integrales de productos de funciones. Esta técnica se basa en una versión de la regla del producto de la derivada, que establece que la derivada de un producto de dos funciones se puede expresar como la suma del producto de una de las funciones por la derivada de la otra y del producto de la derivada de una de las funciones por la otra.

El denominado método de integración por partes se basa en el siguiente teorema:

Teorema: Si las funciones u(x) y v(x) son diferenciables en cierto intervalo y existe la integral $\int v(x) * u'(x)dx$, entonces, existe la integral $\int u(x) * v'(x)dx$ y se cumple que:

$$\int u(x) * v'(x)dx = u(x) * v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Demostración:

Este teorema se demuestra fácilmente utilizando la regla de derivación del producto: $[u(x) * v(x)]' = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$

De donde obtenemos

$$u(x) * v'(x) = [u(x) * v(x)]' - u'(x) * v(x)$$

Como por hipótesis, la función $u'(x) * v(x)$ es integrable y evidentemente la función $[u(x) * v(x)]'$ es integrable y una primitiva de ella es $u(x) * v(x)$, entonces, la función $u(x) * v'(x)$ es integrable y se cumple

$$\int u(x) * v'(x)dx = \int [u(x) * v(x)]'dx - \int u'(x) * v(x)dx$$

De donde

$$\int u(x) * v'(x)dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x)dx$$

Y de esta manera queda demostrado el teorema.

La fórmula que nos arroja el teorema también puede escribirse en la forma $\int udv = uv - \int vdu$, la cual es más utilizada en la práctica.

A continuación, se presenta una explicación del método de integración por partes y se proporcionan seis ejemplos resueltos típicos:

Explicación del método de integración por partes:

Para resolver una integral utilizando el método de integración por partes, seguimos los siguientes pasos:

1. Seleccionar una función u y otra función v de la expresión original.
2. Calcular la derivada de u, denotada como u'.
3. Calcular la integral de v, denotada como ∫v dx.
4. Aplicar la fórmula de integración por partes, sustituyendo los valores calculados en la fórmula.
5. Resolver la nueva integral obtenida, que puede ser más sencilla que la original.

Si es necesario, repetir los pasos anteriores hasta que se alcance una forma que se pueda resolver fácilmente.

A continuación, se presentan tres ejemplos resueltos típicos utilizando el método de integración por partes.

Ejemplo

Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

a) $\int x \ln(x)\, dx$

b) $\int x\, e^x\, dx$

c) $\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$

Solución:

a) $\int x \ln(x)\, dx$

Seleccionamos $u = \ln(x)$ y $dv = x\, dx$

Calculamos $du = 1/x\, dx$ y $v = x^2/2$

Aplicamos la fórmula de integración por partes: $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$\int x \ln(x)\, dx = (x^2/2) \ln(x) - \int (1/x)(x^2/2)\, dx.$

Simplificamos y resolvemos la integral resultante:

$\int x \ln(x)\, dx = x^3/2 - \int x/2\, dx = (x^2/2) \ln(x) - x^2/4 + c$

b) $\int x\, e^x\, dx$

Seleccionamos $u = x$ y $dv = e^x\, dx$

Calculamos $du = dx$ y $v = e^x$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx$

Resolvemos la integral resultante:

$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - e^x + c$

$\int x\, e^x\, dx = e^x (x - 1) + c$

c) $\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$

Seleccionamos $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen}(x)\, dx$

Calculamos $du = 2x\, dx$ y $v\, dx = -\cos(x)$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = -x^2 \cos(x) - \int (2x(-\cos(x))\, dx$

Resolvemos la integral resultante:

$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x)\, dx$

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes a la integral restante

$\int x \cos(x)\, dx$

Seleccionamos $u = x$ y $dv = \cos(x)\, dx$

Calculamos $du = 1$ y $v = \text{sen}(x)$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$2 \int x \cos(x)\, dx = 2\,(x\, \text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)\, dx)$

Resolvemos la nueva integral:

$2 \int x \cos(x)\, dx = 2\,(x\, \text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)\, dx) = 2\,(x\, \text{sen}(x) + \cos(x)) + c$

Luego se obtiene que

$\int x^2 \text{sen}(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x)\, dx$

$\int x^2 \text{sen}(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2\,(x\, \text{sen}(x) + \cos(x)) + c$

$\int x^2 \text{sen}(x)\, dx = (2 - x^2) \cos(x) + 2x\, \text{sen}\,(x) + c$

Estos ejemplos ilustran la aplicación del método de integración por partes para resolver diferentes tipos de integrales. El estudiante debe sistematizar este método y elegir adecuadamente las funciones u y dv para simplificar las integrales y llegar a una solución más manejable.

En ocasiones la selección de u y dv puede hacerse de más de una manera; en estos casos es conveniente antes de aplicar la fórmula, detenerse a pensar cuál es la selección que más conviene a nuestros objetivos.

4.3 Integral definida

La integral definida es un concepto fundamental en el cálculo que permite calcular el área bajo una curva o la acumulación de una cantidad a lo largo de un intervalo definido. Se denota con el símbolo ∫ y se utiliza para representar la integración de una función en un intervalo específico.

Definición de integral definida: Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, divida el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$. Haga que x_0 (a), x_0, x_1, x_2,..., x_n (b) sean puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en [a, b].

El significado exacto del límite que define a las integrales es como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x\right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier selección x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

La suma que aparece en la definición se llama suma de Riemann, en honor al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición menciona que la integral definida de una función integrable puede aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Sabemos que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (ver figura 58). Cabe señalar que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se puede interpretar como el área bajo la curva y = f(x), desde a hasta b (ver figura 59).

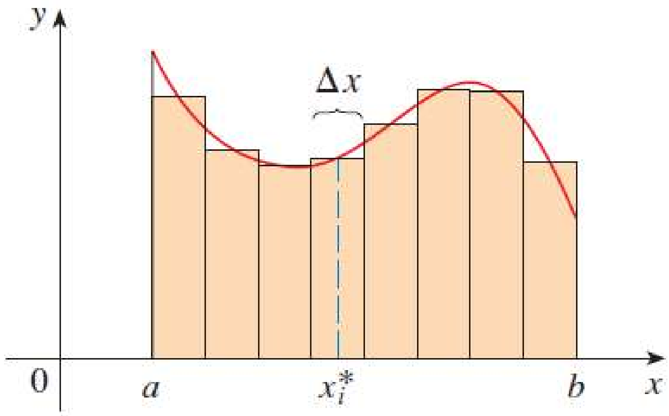


Figura 58. Si f(x) ≥ 0, la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

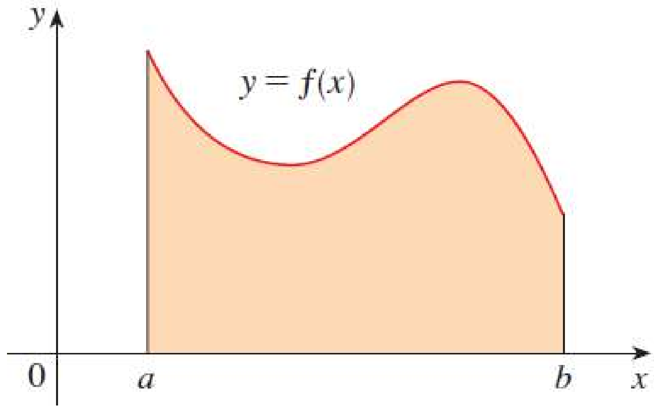


Figura 59. Si f(x) ≥ 0, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la curva y = f(x), desde a hasta b.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 60, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los negativos de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x. Cuando se toma el límite de esas sumas de Riemann, se obtiene la situación que se ilustra en la figura 61.

Una integral definida puede interpretarse como un área neta, es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f y A_2 corresponde a la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

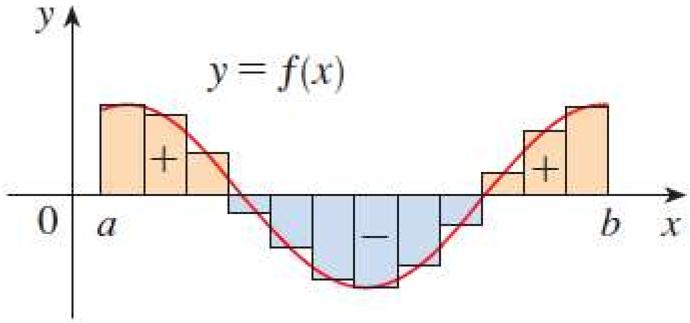


Figura 60. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ es una aproximación al área neta.

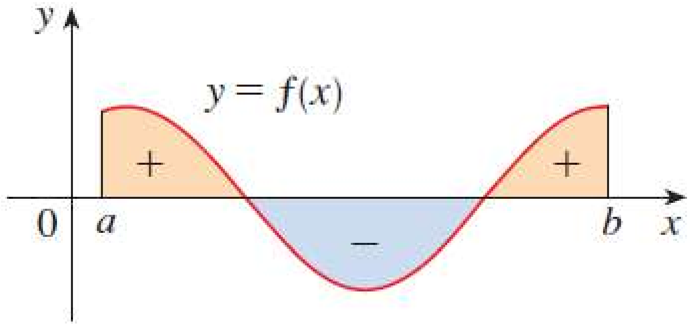


Figura 61. $\int_a^b f(x)dx$ es el área neta.

4.3.1 *Propiedades de la integral definida*

Teorema: Si f es continua en el intervalo [a, b], o sis tiene solamente un número finito de saltos discontinuos, entonces f es integrable en [a, b]; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Teorema: Si f es integrable en [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + \Delta x$

Ejemplo

Evalué las siguientes integrales interpretando cada una en términos de áreas.

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

b) $\int_0^3 (x-1)dx$

Solución

a) Dado que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$, se puede interpretar esta integral como el área debajo de la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero como $y^2 = 1 - x^2$, se obtiene que $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia, con radio 1, que se representa en la figura 62.

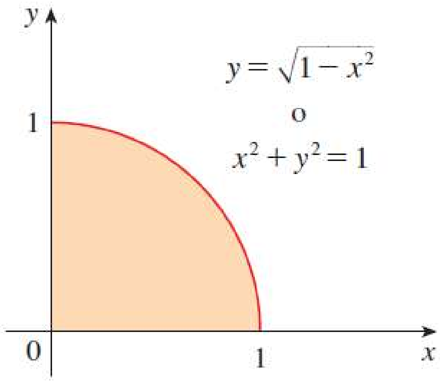


Figura 62. Representación del área debajo de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo [0, 1], representa un cuarto del área de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

Por lo tanto, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$

b) La gráfica de y = x – 1 es la recta con pendiente 1 que se presenta en la figura 63. Se calcula la integral como diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2 * 2) - \frac{1}{2}(2 * 2) = 1.5$$

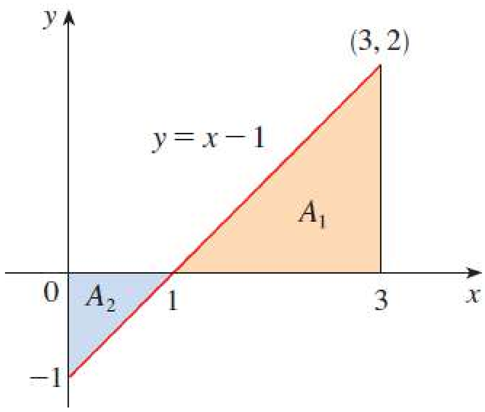


Figura 63. Representación del área que se conforma entre la recta y = x – 1 y el eje x en el intervalo [0, 3].

Las propiedades que presentamos a continuación son útiles tanto para evaluar integrales definidas como para poder establecer comparaciones.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b c dx = c(b-a)$, donde c es cualquier constante real
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b c\, f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$, donde c es cualquier constante real
4. $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
5. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
6. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
7. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

   $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

4.3.2 *Teorema fundamental del cálculo*

Veamos esta primera parte del teorema fundamental del cálculo que está muy relacionado con el concepto de primitiva o antiderivada estudiada anteriormente:

Teorema fundamental del cálculo (primera parte)

Si f es una función continua en el intervalo [a, b], entonces la función g definida en [a, b] por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$

es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y además g'(x) = f(x).

Observaciones:

1. Del teorema anterior se puede apreciar que si g(x) es definida en la forma dada entonces g es una primitiva de f para toda x de [a, b].
2. Este importante teorema nos dice que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior de integración es igual a la función integrando evaluada en el límite superior de integración.
3. A partir del teorema y la notación de Leibniz se puede plantear que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

4. Si x = a se tiene que $g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

Ejemplos

1. Si se tiene que $g(x) = \int_1^x \sqrt{2 + \operatorname{sen}t}\, dt$ determine $g'(x)$.

Solución:

Como $f(t) = \sqrt{2 + \operatorname{sen}t}$ es continua para toda t real la primera parte del teorema fundamental del cálculo garantiza que $g(x) = \sqrt{2 + \operatorname{sen}x}$ para toda x real.

Una consecuencia lógica del teorema anterior está avalada por el resultado del siguiente ejemplo.

2. Si f(x) y g(x) son funciones continuas, demuestre que si la función h(x) está definida por $h(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$, entonces $h'(x) = f[g(x)]g'(x)$.

Solución:

Sea u = g(x) así, du = g′(x) dx, $h(u) = \int_a^u f(t)dt$ se tiene, el árbol de dependencia funcional que h depende de u y, a su vez, u depende de x: h → u → x

Por tanto, aplicando la regla de la cadena

$$h'(x) = h'(u)\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$$

por ser h una primitiva de f se tiene que h′(x) = f (u) y así se obtiene finalmente que

$$h'(x) = f[g(x)]g'(x)$$

3. Determina $\frac{d}{dx}\int_2^{x^5} \operatorname{sen}z\, dz$

Solución:

Como la variable que se utiliza para la integral es irrelevante, es decir, puede ser cualquiera, se tiene a partir del resultado anterior que

Si $h(x) = \int_2^{x^5} \operatorname{sen}z\, dz \Rightarrow h'(x) = \frac{d}{dx}\int_2^{x^5} \operatorname{sen}z\, dz = (\operatorname{sen}x^5)5x^4$

La segunda parte del teorema fundamental del cálculo ofrece un método mucho más sencillo para el cálculo de una integral definida.

Teorema fundamental del cálculo (segunda parte)

Si f es una función continua en el intervalo [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F(x) es cualquier antiderivada de f(x) en el intervalo [a, b], es decir, una función tal que F'(x) = f(x).

Demostración:

Sea h(x) definida por $h(x) = \int_a^x f(x)dx$ para cada de x de [a, b] y F(x) cualquier antiderivada de f(x) en dicho intervalo, entonces, como h(x) es otra primitiva de f(x) se tiene, como es conocido, que F(x) y h(x) difieren en una constante, es decir, existe un número C tal que h(x) – F(x)=c para todo x en [a, b], de donde

$$\int_a^x f(x)dx - F(x) = c$$

igualdad que se cumple para todo x de [a, b].

Evaluando para x = a y teniendo en cuenta que

$$h(a) = \int_a^a f(x)dx = 0 \text{ se tiene que } 0 - F(a) = c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a)$$

De donde

$$\int_a^x f(x)dx - F(x) = -F(a)$$

y ahora evaluando para x = b se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx - F(b) = F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

y queda demostrado el teorema.

Observaciones:

1. La fórmula $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ también es conocida como fórmula de Newton-Leibniz ó regla de Barrow.

2. En términos físicos si v(t) es la velocidad de un objeto que se mueve en una dirección determinada y s(t) es su posición en el tiempo entonces, como es conocido, s'(t) = v(t), es decir, s es un antiderivada de v, por tanto,

$$S = \int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$$

representa el espacio recorrido por el objeto entre los instantes de tiempo t = a y t = b.

Ahora uniremos las dos partes del teorema fundamental:

Teorema fundamental del cálculo

Sea f continua en [a, b].

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces g'(x) = f(t).

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, F'(x) = f(x) para todo x de [a, b].

4.3.3 *Cálculo de áreas entre curvas*

Una vez recordada la forma de calcular el área bajo una curva es muy fácil introducir el concepto de área entre curvas y su cálculo para el caso en que una función está por encima de la otra en un intervalo dado.

caso 1. Cálculo del área entre curvas: El área A de la región limitada por las curvas y = f(x), y = g(x) y las rectas x = a, x = b, donde f y g son continuas y f(x) ≥ g(x) para toda x en [a, b] es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Observe que en el caso particular en el que g(x) = 0 la fórmula anterior se reduce al caso en el que calculamos el área entre una curva y el eje x.

Analicemos es el caso de que las dos curvas estén por encima del eje x, para ello presentaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplos

1. Determine el área de la región acotada por arriba con $y = e^x$, por abajo mediante y = x y a los lados por x = 0 y x = 1.

Solución:

La región se muestra en la figura 64. La curva del límite superior es $y = e^x$ y la curva del límite inferior es y = x. De este modo se puede usar la fórmula

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, a = 0 y b = 1.

Luego se obtiene

$$A = \int_0^1 (e^x - x)dx = \left(e^x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$

$$A = e - \frac{1}{2} - 1$$

$$A = 1.5$$

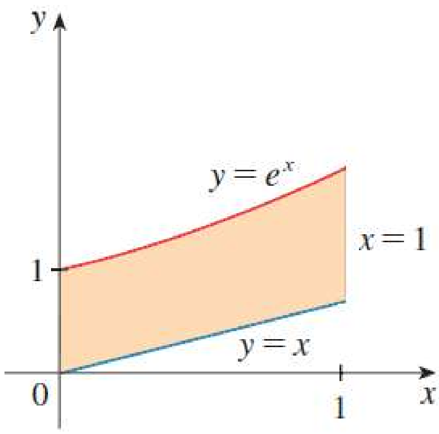


Figura 64. Área entre dos curvas por encima del eje x.

Veremos el caso de que las funciones f(x) y g(x) estén una por encima de la otra en unos puntos de un intervalo dado y en otros puntos no.

2. Cálculo del área entre curvas: El área A de la región limitada por las curvas y = f(x), y = g(x) y las rectas x = a, x = b, donde f y g son continuas y f(x) ≥ g(x) para algunos valores de x en [a, b], y f(x) ≤ g(x) para otros valores de x en [a, b], es la siguiente:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

En general, esta fórmula de cálculo puede aplicarse para diferentes intervalos en los que f(x) ≥ g(x) o f(x) ≤ g(x). A continuación, se presenta un ejemplo que permite ilustrar su empleo.

Ejemplo

Calcular el área de la región acotada por las curvas y = senx, y = cos x, x = 0 y x = $\pi/2$.

Solución:

Los puntos de intersección se presentan cuando senx = cos x, es decir, cuando x = $\pi/4$ (puesto que $0 \leq x \leq \pi/2$). La región se ilustra en la figura 66.

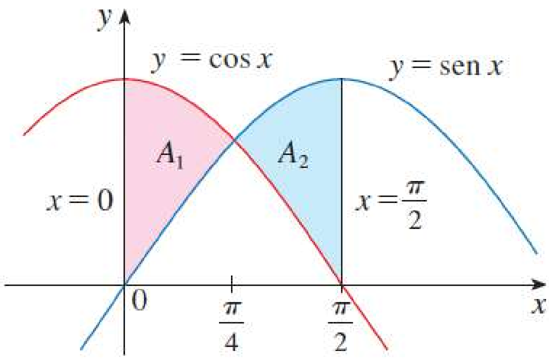


Figura 65. Área entre las curvas con f(x) ≥ g(x) ó f(x) ≤ g(x) para toda x en [a, b].

El área requerida es

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos(x) - \mathrm{sen}(x)|dx = A_1 + A_2$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \mathrm{sen}(x))dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\mathrm{sen}(x) - \cos(x))dx$$

$$A = [\mathrm{sen}(x) + \cos(x)]|_{0}^{\pi/4} + [\,x] - [\cos(x) - \mathrm{sen}(x)]|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 + (0 - 1\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$A = 2(\sqrt{2} - 1)$$

En este ejemplo se hubiese ahorrado algún trabajo si se hubiese utilizado el hecho de que la región es simétrica respecto a $x = \pi/4$ y así

$$A = 2\,A_1 = 2\int_0^{\pi/4}(\cos(x) - \mathrm{sen}(x))dx = 2(\sqrt{2} - 1)$$

4.4 Ejercicios del capítulo

En esta sección los estudiantes deben poner en práctica sus conocimientos y desarrollar sus habilidades para comprender los ejercicios y problemas que se presentan, así como para resolver aquellos que se les proponen.

4.4.1 Ejercicios resueltos

1. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int (2x + 1)^4 dx$

b) $\int (x^2 + 1)^8 2x\, dx$

c) $\int x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

d) $\int \frac{lnx}{x}\, dx$

Soluciones:

a) Se utiliza el cambio de variable: $t = 2x + 1,\ dt = 2dx$

$$\int \frac{(t)^4}{2} dt = \frac{(t)^5}{10} + C = \frac{(2x+1)^5}{10} + C$$

b) Se utiliza el cambio de variable: $t = x^2 + 1,\ dt = 2xdx$

Luego: $\int (x^2 + 1)^8 2x\, dx = \int t^8\, dt = \frac{t^9}{9} + C \ = \frac{x^2+1^9}{9} + C$

c) Se utiliza el cambio de variable: $t = x^2 + 1, \quad dt = 2xdx$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

d) Se realiza el cambio de variable: $t = lnx, \quad dt = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{lnx}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(lnx)^2}{2} + c$$

2. Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

a) $\int \mathrm{x^2 sen\;ax\,dx}$

b) $\int \mathrm{ln\;x\;dx}$

c) $\int \mathrm{arctan\;x\;dx}$

Soluciones:

a) $\int \mathrm{x^2 sen\;ax\,dx}$

Si consideramos $\mathrm{u = x^2}$ y $\mathrm{dv = sen\;axdx}$,

tenemos $\mathrm{du = 2xdx}$ y $\mathrm{v = -\frac{cosax}{a}}$, luego,

$$\int \mathrm{x^2 sen\;ax\,dx = -\frac{x^2}{a}cos\,ax + \frac{2}{a}\int xcos\;ax\,dx}$$

A la integral $\int \mathrm{xcos\;ax\;dx}$ también se le debe aplicar la fórmula de integración por partes, tomando u = x y $\mathrm{dv = cos\,ax\,dx}$

tenemos $\mathrm{du = dx}$ y $\mathrm{v = \frac{1}{a}sen\;ax}$

luego

$$\int \mathrm{xcos\;ax\;dx = \frac{x}{a}sen\;ax - \frac{1}{a}\int sen\;ax\;dx} =$$

$$= \mathrm{\frac{x}{a}sen\;ax + \frac{1}{a^2}cos\,ax + C}$$

Y finalmente obtenemos

$$\int x^2 \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{x^2}{a}\cos ax + \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen} ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$$

b) $\int \ln x\, dx$

Consideremos $\quad u = \ln x \quad$ y $\quad dv = dx$

tenemos $\quad du = \frac{dx}{x} \quad$ y $\quad v = x$

luego

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x = x(\ln x - 1) + C$$

c) $\int \arctan x\, dx$

Tomando $\quad u = \arctan x \quad$ y $\quad dv = dx$

tenemos $\quad du = \frac{dx}{1+x^2} \quad$ y $\quad v = x$

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int x\frac{dx}{1+x^2}$$

Utilizando el método de sustitución se calcula la integral del segundo miembro de la ecuación y finalmente obtenemos

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

3. Calcular la siguiente integral definida $\int_2^5 7dx$

Solución:

Como es una constante, entonces:

$$\int_2^5 7dx = 7(5-2) = 7(3) = 21$$

4. Si se conoce que $\int_0^2 x^3 dx = 4$, $\int_0^2 x\, dx = 2$ y $\int_0^2 dx = 2$ entonces solamente utilizando propiedades estudiadas calcular $\int_0^2 (5x^3 - 3x + 4)dx$.

Solución:

$$\int_0^2 (5x^3 - 3x + 4)dx = \int_0^2 5x^3 dx - \int_0^2 3x dx + \int_0^2 4dx$$

$$= 5\int_0^2 x^3dx - 3\int_0^2 xdx - 4\int_0^2 dx$$

= 5(4) – 3(2) + 8 Sustituyendo

= 20 – 6 + 8

= 22

5) Evalúe la siguiente integral definida $\int_4^5 (\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3})dx$

Solución:

$\int_4^5 x^{-2}dx + \int_4^5 5x^{-3}dx$ integrando obtenemos

$$\left[\frac{x^{-1}}{-1} + 5\frac{x^{-2}}{-2}\right]_4^5 = \left[-\frac{1}{x} - \frac{5}{2x^2}\right]_4^5$$

Sustituimos aplicando la definición

$$= -\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{2(5)^2}\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{2(4)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{5}{50} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} = \frac{17}{160} = 0.10625$$

6) Calcular el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y

$y = x^4 - x.$

Solución:

Se deben encontrar los puntos de intersección entre las curvas, por lo que habría que resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

Para resolver esta ecuación se debe hacer por aproximación porque no es posible encontrar una solución exacta, por ejemplo, podría aplicarse el método de la bisección visto en el capítulo 2. Se obtiene entonces que un punto de intersección es el origen y el otro aproximadamente x = 1.18 (ver figura 65).

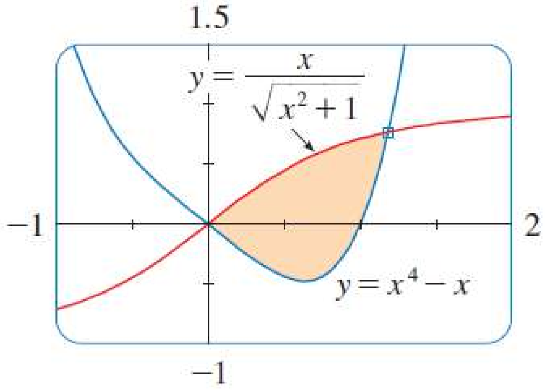


Figura 66. Representación del área entre las curvas por encima y por debajo del eje x y con f(x) ≥ g(x) para toda x en [a, b]

En estos términos, una aproximación al área buscada es

$$A = \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x)\right] dx$$

Para integrar el primer término se puede aplicar la sustitución $u = x^2 + 1$. Entonces, du = 2xdx, y cuando x = 1.18, u ≈ 2.39. Así

$$A = \frac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)dx$$

$$A = \sqrt{u}\Big|_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{1.18}$$

$$A = \sqrt{2.39} - 1 - \frac{1.18^5}{5} + \frac{1.18^2}{2}$$

$$A = 0.785$$

4.4.2 Ejercicios propuestos

1. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen}(mx)\, dx$

b) $\int \frac{dx}{x+a}$

c) $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$

2. Calcule las siguientes integrales

a) $\int x^2 * \ln(x)\, dx$

b) $\int x^2 \cos(x)\, dx$

c) $\int e^x \cos(x)\, dx$

d) $\int (\ln x)^2\, dx$

3. Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{2}^{7} \left(x^3 - 4x\right) dx$

b) $\int_{5}^{6} \left(y^3 - y^2 + 1\right) dy$

c) $\int_{0}^{\Pi} 3 sen Z dz$

d) $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$

e) $\int_1^e \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx$

f) $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + x^2\right) dx$

4. Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

5. Encuentre el área de la región encerrada por la parábola $y = 2x - x^2$ y la línea recta $y = 0$.

6. Encuentre el área comprendida entre la recta y = x – 1 y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

4.5 Recursos tecnológicos y didácticos

A continuación, se presentan algunos recursos tecnológicos y didácticos que pueden ser útiles tanto para estudiantes como para profesores al estudiar y enseñar el contenido de cálculo integral. Estos recursos pueden ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos y facilitar la resolución de problemas.

4.5.1 Recursos tecnológicos

- **Software de cálculo simbólico:** Utiliza software como Wolfram Mathematica o Maple, que permiten realizar cálculos simbólicos relacionados con el cálculo integral. Los estudiantes pueden calcular integrales, encontrar antiderivadas y explorar propiedades de la integral de manera computacional.
- **Herramientas en línea de cálculo integral:** Utiliza herramientas en línea como Symbolab o Wolfram Alpha, que ofrecen soluciones paso a paso para problemas de cálculo integral. Los estudiantes pueden ingresar una función y obtener la antiderivada, calcular integrales definidas y explorar otros conceptos relacionados.
- **Aplicaciones móviles:** Hay diversas aplicaciones móviles disponibles que ofrecen recursos interactivos y ejercicios de cálculo integral. Algunas opciones populares incluyen Photomath, Mathway y Khan Academy. Estas aplicaciones brindan ejemplos, ejercicios y explicaciones paso a paso para ayudar a los estudiantes a comprender y practicar el cálculo integral.
- **Simulaciones interactivas:** Utiliza simulaciones interactivas en línea, como las disponibles en el sitio web PhET de la Universidad de Colorado, que permiten a los estudiantes visualizar y explorar conceptos relacionados con el cálculo integral. Por ejemplo, pueden explorar cómo cambia el área bajo una curva al variar los límites de integración.
- **Herramientas de visualización de gráficas:** Utiliza herramientas en línea como GeoGebra o Desmos, que permiten graficar funciones y visualizar áreas bajo curvas. Los estudiantes pueden explorar gráficamente conceptos relacionados con el cálculo integral, como el cálculo de áreas entre curvas o la interpretación geométrica de la integral definida.

4.5.2 Recursos didácticos

- **Ejemplos y ejercicios variados**: Proporciona a los estudiantes una amplia variedad de ejemplos y ejercicios que aborden diferentes técnicas y aplicaciones del cálculo integral. Esto les permitirá comprender y practicar la aplicación de las propiedades y técnicas del cálculo integral.
- **Problemas de aplicación del cálculo integral**: Presenta a los estudiantes problemas de aplicación del cálculo integral en contextos reales, como la física, la economía o la biología. Esto les ayudará a relacionar los conceptos del cálculo integral con situaciones prácticas y desarrollar habilidades de resolución de problemas.
- **Uso de manipulativos**: Emplea manipulativos físicos, como figuras geométricas o modelos tridimensionales, para representar gráficamente conceptos relacionados con el cálculo integral. Por ejemplo, puedes utilizar bloques de colores para visualizar el cálculo de áreas entre curvas.
- **Enseñanza basada en proyectos**: Propón proyectos en los que los estudiantes puedan aplicar los conceptos del cálculo integral en situaciones de la vida real. Por ejemplo, pueden investigar cómo se utiliza el cálculo integral en la construcción de puentes o en la estimación de volúmenes de objetos.
- **Uso de recursos en línea**: Aprovecha los recursos en línea, como tutoriales en video, lecciones interactivas y actividades en línea, para complementar la enseñanza en el aula. Plataformas educativas como Khan Academy, MathisFun o Coursera ofrecen una amplia gama de recursos matemáticos relacionados con el cálculo integral.

CAPÍTULO 5. ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA SUPERIOR Y EDUCACIÓN 4.0

5.0 Introducción al capítulo

En la era actual de la Educación 4.0, donde la tecnología y la innovación están transformando rápidamente la forma en que aprendemos y enseñamos, la matemática superior no es una excepción. En este capítulo, exploraremos las tendencias tecnológicas y didácticas que están revolucionando la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior.

En la sección 5.1, "Tendencias tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática superior", examinaremos cómo las nuevas herramientas y enfoques tecnológicos están mejorando significativamente la forma en que los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos avanzados. La inteligencia artificial, la realidad virtual, las plataformas en línea y las aplicaciones móviles son solo algunas de las tecnologías que están cambiando la forma en que se presenta y se comprende la matemática superior. Analizaremos cómo estas tendencias tecnológicas están facilitando la visualización de conceptos abstractos, la resolución automática de problemas y la personalización del aprendizaje, lo que brinda a los estudiantes mayores oportunidades para explorar, practicar y dominar los temas matemáticos complejos.

En la sección 5.2, "Tendencias de la didáctica de la matemática en la educación superior", nos adentraremos en los enfoques pedagógicos innovadores que están transformando la forma en que se imparte la matemática superior. La educación activa, el aprendizaje basado en proyectos, la colaboración entre pares y la evaluación formativa son solo algunos de los aspectos destacados en esta sección. Exploraremos cómo estos enfoques pedagógicos fomentan el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la aplicación práctica de los conceptos matemáticos, preparando a los estudiantes para enfrentar los desafíos del mundo real. Además, examinaremos el papel del profesor como facilitador del aprendizaje y cómo la tecnología puede apoyar y mejorar su labor docente.

A medida que avanzamos en este capítulo, descubriremos cómo la combinación de las tendencias tecnológicas y los enfoques pedagógicos innovadores está redefiniendo la experiencia de enseñanza y aprendizaje de la matemática superior en la educación 4.0. Estas transformaciones no solo brindan a los estudiantes las herramientas y habilidades necesarias para tener éxito en un entorno digital, sino que también promueven un aprendizaje más profundo, significativo y atractivo. Prepárate para adentrarte en un viaje que te llevará a explorar las fronteras de la matemática superior y a descubrir nuevas formas de enseñar y aprender en la era de la Educación 4.0.

5.1 Tendencias tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática superior

La educación 4.0 es un concepto que surge en el contexto de la denominada "Cuarta Revolución Industrial", caracterizada por la integración de tecnologías digitales y la transformación de los procesos educativos. Se refiere a un enfoque educativo que aprovecha las ventajas de la tecnología y las nuevas metodologías pedagógicas para potenciar el aprendizaje y preparar a los estudiantes para enfrentar los desafíos de la sociedad actual y futura.

En relación con la enseñanza y aprendizaje de la matemática superior, la educación 4.0 desempeña un papel fundamental en la mejora de estos procesos. La matemática es una disciplina que requiere comprensión profunda, habilidades de resolución de problemas y capacidad para aplicar conceptos en diferentes contextos. La tecnología y los enfoques pedagógicos innovadores de la educación 4.0 proporcionan herramientas y metodologías que complementan y enriquecen la enseñanza y el aprendizaje de la matemática superior.

En primer lugar, la tecnología desempeña un papel esencial al permitir la visualización de conceptos matemáticos complejos. Las herramientas digitales, como las aplicaciones interactivas y los programas de visualización, facilitan la comprensión de conceptos abstractos, como las funciones y sus propiedades mediante representaciones gráficas y animaciones que ayudan a los estudiantes a visualizar y explorar las relaciones matemáticas.

Además, la educación 4.0 fomenta el aprendizaje activo y colaborativo, lo cual es especialmente relevante para la matemática superior. Los enfoques pedagógicos basados en proyectos, la resolución de problemas en equipo y el trabajo colaborativo promueven el pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad de aplicar los conceptos matemáticos en situaciones reales. La tecnología facilita la comunicación y la colaboración entre los estudiantes, permitiéndoles trabajar juntos de manera sincrónica o asincrónica, compartir recursos y resolver problemas matemáticos de manera más eficiente.

Además, la educación 4.0 aprovecha la capacidad de la inteligencia artificial y el aprendizaje automático para personalizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las plataformas digitales pueden adaptarse a las necesidades individuales de cada estudiante, ofreciendo recursos y actividades personalizadas que se ajustan a su nivel de conocimiento y ritmo de aprendizaje. Esto permite a los estudiantes avanzar a su propio ritmo, recibir retroalimentación inmediata y acceder a recursos adicionales según sus necesidades específicas.

Por lo tanto, la educación 4.0 redefine la forma en que se enseña y se aprende la matemática superior al aprovechar las ventajas de la tecnología y los enfoques pedagógicos innovadores. La visualización de conceptos matemáticos, el aprendizaje activo y colaborativo, y la personalización del proceso de enseñanza y aprendizaje son aspectos clave de la educación 4.0 que mejoran la comprensión, el desarrollo de habilidades y la aplicación de la matemática en contextos reales. Al combinar la tecnología con los enfoques pedagógicos adecuados, la educación 4.0 potencia el aprendizaje de la matemática superior y prepara a los estudiantes para enfrentar los retos de un mundo cada vez más digitalizado.

Si bien en cada capítulo se brindaron diversos recursos tecnológicos útiles para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. A continuación, se brindan algunos recursos que desde la educación 4.0 pueden complementarse con los mencionados anteriormente. Estos recursos se recomiendan en relación a los cuatro capítulos del libro:

Capítulo I. Funciones reales:

- **Tutoría virtual personalizada**: La inteligencia artificial, como "Socratic" (https://socratic.org/), proporciona tutoría virtual personalizada en el estudio de funciones reales. Socratic es una plataforma educativa impulsada por inteligencia artificial que ofrece explicaciones paso a paso, ejemplos relevantes y retroalimentación inmediata sobre los conceptos y problemas relacionados con funciones reales.
- **Generación automática de ejercicios y problemas**: La inteligencia artificial, como "Mathway" (https://www.mathway.com/), puede generar automáticamente una amplia variedad de ejercicios y problemas relacionados con funciones reales. Mathway es una herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para generar problemas matemáticos y brindar soluciones detalladas. Los estudiantes pueden practicar con los ejercicios generados por Mathway para reforzar su comprensión y habilidades en el tema.
- **Análisis gráfico interactivo**: La inteligencia artificial, como "Desmos" (https://www.desmos.com/), ofrece herramientas interactivas de análisis gráfico que permiten a los estudiantes explorar y visualizar funciones reales. Desmos es una plataforma en línea que proporciona una calculadora gráfica interactiva y herramientas de visualización que ayudan a los estudiantes a comprender mejor las características y propiedades de las funciones reales.
- **Asistencia en la identificación de comportamientos de funciones**: La inteligencia artificial, como "Symbolab" (https://www.symbolab.com/), puede ayudar a los estudiantes a identificar y comprender los diferentes comportamientos de las funciones reales. Symbolab es una herramienta en línea que utiliza inteligencia

artificial para resolver problemas matemáticos y proporcionar explicaciones detalladas. Los estudiantes pueden ingresar una función y Symbolab les mostrará su gráfico, puntos críticos, asíntotas y otros comportamientos relevantes.

- **Recursos adicionales y ejemplos de aplicación**: La inteligencia artificial, como "Khan Academy" (https://www.khanacademy.org/), ofrece una amplia gama de recursos y ejemplos de aplicación relacionados con funciones reales. Khan Academy es una plataforma educativa en línea que utiliza inteligencia artificial para proporcionar lecciones interactivas y recursos complementarios. Los estudiantes pueden acceder a tutoriales, ejercicios y ejemplos prácticos que les ayudarán a comprender y aplicar los conceptos relacionados con funciones reales.

Capítulo II. Límites y continuidad:

- **Simulaciones interactivas**: La inteligencia artificial, como "Desmos" (https://www.desmos.com/), proporciona simulaciones interactivas que permiten a los estudiantes explorar y comprender conceptos relacionados con límites y continuidad. Desmos es una plataforma en línea que ofrece una calculadora gráfica interactiva y herramientas de visualización que ayudan a los estudiantes a comprender y experimentar con diversas funciones y conceptos matemáticos.
- **Asistencia en la resolución de problemas**: La inteligencia artificial, como "Symbolab" (https://www.symbolab.com/), brinda asistencia en la resolución de problemas relacionados con límites y continuidad. Symbolab es una herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para resolver problemas matemáticos y proporcionar explicaciones paso a paso. Los estudiantes pueden ingresar un problema y recibir orientación detallada sobre cómo abordarlo, lo que les permite desarrollar habilidades de resolución de problemas y superar obstáculos en su comprensión de límites y continuidad.
- **Tutoría virtual personalizada**: La inteligencia artificial, como "Socratic" (https://socratic.org/), ofrece tutoría virtual personalizada en el estudio de límites y continuidad. Socratic es una plataforma educativa impulsada por inteligencia artificial que proporciona explicaciones y respuestas a preguntas específicas sobre

límites y continuidad, ayudando a los estudiantes a comprender los conceptos y superar dificultades.

- **Herramientas de visualización de límites**: La inteligencia artificial, como "Mathway" (https://www.mathway.com/), ofrece herramientas de visualización interactivas que ayudan a los estudiantes a comprender y explorar límites matemáticos.
- **Recursos adicionales y ejemplos de aplicación**: La inteligencia artificial, como "Khan Academy" (https://www.khanacademy.org/), proporciona una amplia variedad de recursos educativos y ejemplos de aplicación relacionados con límites y continuidad. Khan Academy es una plataforma en línea que utiliza inteligencia artificial para ofrecer lecciones interactivas y materiales complementarios. Los estudiantes pueden acceder a tutoriales, ejercicios y ejemplos prácticos que les ayudarán a comprender y aplicar los conceptos de límites y continuidad.

Capítulo III. Cálculo diferencial:

- **Tutoría virtual personalizada**: La inteligencia artificial, como "Socratic" (https://socratic.org/), proporciona tutoría virtual personalizada en el estudio del cálculo diferencial. Socratic es una plataforma educativa impulsada por inteligencia artificial que ofrece explicaciones paso a paso, ejemplos relevantes y retroalimentación inmediata sobre los conceptos y problemas relacionados con el cálculo diferencial.
- **Resolución automática de problemas**: La inteligencia artificial, como "Symbolab" (https://www.symbolab.com/), puede resolver automáticamente problemas de cálculo diferencial. Symbolab es una herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para resolver problemas matemáticos y proporcionar soluciones detalladas. Los estudiantes pueden ingresar un problema y obtener una respuesta paso a paso, lo que les ayuda a comprender los conceptos y técnicas utilizados.
- **Recursos interactivos de aprendizaje**: La inteligencia artificial, como "Wolfram Alpha" (https://www.wolframalpha.com/), ofrece recursos interactivos de aprendizaje relacionados con el cálculo diferencial. Wolfram Alpha es una

herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para ofrecer respuestas y explicaciones detalladas sobre una amplia gama de temas matemáticos. Los estudiantes pueden ingresar consultas relacionadas con el cálculo diferencial y recibir respuestas claras y concisas, junto con gráficos y representaciones visuales.

- **Generación automática de ejercicios**: La inteligencia artificial, como "Mathway" (https://www.mathway.com/), puede generar automáticamente una variedad de ejercicios y problemas relacionados con el cálculo diferencial. Mathway es una herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para generar problemas matemáticos y proporcionar soluciones paso a paso. Los estudiantes pueden practicar con los ejercicios generados por Mathway para mejorar sus habilidades en el cálculo diferencial.
- **Comunidad en línea de apoyo**: La inteligencia artificial, como "Math Stack Exchange" (https://math.stackexchange.com/), brinda una comunidad en línea donde los estudiantes pueden hacer preguntas y recibir respuestas de expertos en cálculo diferencial. Math Stack Exchange es un foro en línea donde los estudiantes pueden plantear preguntas y obtener respuestas de una comunidad activa de profesores y estudiantes de matemáticas.

Capítulo IV. Cálculo integral:

- **Resolución automática de integrales**: La inteligencia artificial, como "Symbolab" (https://www.symbolab.com/), tiene la capacidad de resolver integrales automáticamente. Symbolab es una herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para resolver problemas matemáticos y proporcionar soluciones detalladas. Los estudiantes pueden ingresar una integral y Symbolab les mostrará los pasos necesarios para resolverla, lo que les ayuda a comprender los conceptos y técnicas utilizados en el cálculo integral.
- **Tutoría virtual personalizada**: La inteligencia artificial, como "Socratic" (https://socratic.org/), ofrece tutoría virtual personalizada en el estudio del cálculo integral. Socratic es una plataforma educativa impulsada por inteligencia artificial

que proporciona explicaciones paso a paso, ejemplos relevantes y retroalimentación inmediata

- **Herramientas de visualización de integrales**: La inteligencia artificial, como "Desmos" (https://www.desmos.com/), ofrece herramientas interactivas de visualización que permiten a los estudiantes explorar y comprender el cálculo integral. Desmos es una plataforma en línea que proporciona una calculadora gráfica interactiva y herramientas de visualización que ayudan a los estudiantes a comprender y visualizar las integrales y las áreas bajo las curvas.
- **Generación automática de ejercicios**: La inteligencia artificial, como "Mathway" (https://www.mathway.com/), puede generar automáticamente una variedad de ejercicios y problemas relacionados con el cálculo integral. Mathway es una herramienta en línea que utiliza inteligencia artificial para generar problemas matemáticos y proporcionar soluciones paso a paso. Los estudiantes pueden practicar con los ejercicios generados por Mathway para mejorar sus habilidades en el cálculo integral y reforzar su comprensión de los conceptos.
- **Recursos adicionales y ejemplos de aplicación**: La inteligencia artificial, como "Khan Academy" (https://www.khanacademy.org/), proporciona una amplia variedad de recursos educativos y ejemplos prácticos relacionados con el cálculo integral. Khan Academy es una plataforma en línea que utiliza inteligencia artificial para ofrecer lecciones interactivas y materiales complementarios. Los estudiantes pueden acceder a tutoriales, ejercicios y ejemplos prácticos que les ayudarán a comprender y aplicar los conceptos del cálculo integral en diferentes contextos.

Como puede observarse, la inteligencia artificial ofrece una serie de facilidades clave para favorecer la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de los capítulos de este libro. Estas facilidades incluyen tutoría virtual personalizada, generación automática de ejercicios y problemas, herramientas de visualización interactivas, resolución automática de problemas y acceso a recursos adicionales y ejemplos de aplicación.

A continuación, se presenta un resumen de las ventajas que ofrece la inteligencia artificial al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos del presente libro:

- Explicaciones claras y detalladas: CHATGPT puede proporcionar explicaciones claras y detalladas sobre los conceptos y temas abordados en cada capítulo. Los estudiantes pueden plantear preguntas o solicitar aclaraciones específicas, y CHATGPT responderá con información relevante y comprensible. Esto ayuda a los estudiantes a comprender mejor los conceptos y aclarar cualquier confusión que puedan tener.
- Resolución de problemas y ejercicios: CHATGPT puede ayudar a los estudiantes a resolver problemas y ejercicios relacionados con los contenidos de cada capítulo. Los estudiantes pueden proporcionar los enunciados de los problemas y CHATGPT puede guiarlos paso a paso a través del proceso de resolución, mostrando los métodos y técnicas adecuados. Esto permite a los estudiantes practicar y fortalecer sus habilidades en la resolución de problemas, al tiempo que obtienen retroalimentación inmediata.
- Recursos adicionales y referencias: CHATGPT puede proporcionar recursos adicionales y referencias útiles para ampliar el estudio de los contenidos de cada capítulo. Puede sugerir libros, artículos, videos, sitios web u otras fuentes de información relevantes que los estudiantes pueden explorar para profundizar en los temas específicos. Esto enriquece el proceso de aprendizaje y brinda a los estudiantes la oportunidad de acceder a diferentes perspectivas y enfoques.
- Personalización y adaptabilidad: CHATGPT puede adaptarse a las necesidades y estilos de aprendizaje individuales de los estudiantes. Puede proporcionar explicaciones y ejemplos personalizados según el nivel de conocimiento y comprensión del estudiante. Además, CHATGPT puede adaptar su enfoque de enseñanza en función de las preferencias del estudiante, brindando un aprendizaje más personalizado y efectivo.
- Disponibilidad y accesibilidad: CHATGPT está disponible en línea las 24 horas del día, los 7 días de la semana, lo que brinda a los estudiantes la flexibilidad de acceder a su ayuda en cualquier momento y desde cualquier lugar. Esto facilita el proceso

de aprendizaje, ya que los estudiantes pueden recibir asistencia instantánea sin importar su ubicación geográfica o el horario en el que estén estudiando.

De este modo, la inteligencia artificial puede actuar como un compañero de estudio virtual que brinda explicaciones claras, resuelve problemas, proporciona recursos adicionales y se adapta a las necesidades individuales de los estudiantes. Su disponibilidad en línea y accesibilidad lo convierten en una herramienta valiosa para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de cada capítulo del libro.

Al utilizar estas herramientas impulsadas por inteligencia artificial, los estudiantes pueden mejorar su comprensión de las funciones reales, límites y continuidad, cálculo diferencial y cálculo integral, lo que les ayuda a desarrollar habilidades matemáticas sólidas y a aplicar los conceptos de manera efectiva.

5.2 Tendencias de la didáctica de la matemática en la educación superior

La didáctica de la matemática es una disciplina que se ocupa del estudio de los métodos y estrategias de enseñanza de esta materia, así como de la investigación sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Se enfoca en el estudio de cómo transmitir eficazmente los conceptos, habilidades y aplicaciones de la matemática, considerando las características y necesidades de los estudiantes, así como los contextos educativos en los que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La didáctica de la matemática busca promover un aprendizaje significativo y duradero, fomentando el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la capacidad de aplicar los conceptos matemáticos en diferentes situaciones. Para lograrlo, se vale de diferentes enfoques, metodologías y recursos didácticos que se adaptan a las características de los estudiantes y al contexto educativo.

La relación entre la didáctica de la matemática y el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina es estrecha y fundamental. La didáctica de la matemática proporciona a los docentes herramientas y estrategias para planificar, desarrollar y evaluar las actividades de enseñanza de manera efectiva. Esto implica seleccionar los contenidos y los recursos adecuados, diseñar situaciones de aprendizaje desafiantes y significativas, y utilizar estrategias de enseñanza que promuevan la participación activa de los estudiantes y su construcción del conocimiento.

La didáctica de la matemática también se preocupa por la identificación y comprensión de las dificultades y obstáculos que los estudiantes pueden enfrentar al aprender matemáticas. A través de la investigación y el análisis de los errores y las concepciones erróneas más comunes, se busca desarrollar intervenciones pedagógicas que ayuden a los estudiantes a superar estas dificultades y a construir una comprensión sólida de los conceptos matemáticos.

Además, la didáctica de la matemática promueve el uso de enfoques pedagógicos innovadores que se adaptan a las necesidades y características de los estudiantes. Esto implica utilizar estrategias de enseñanza activas, como el aprendizaje basado en proyectos, el uso de tecnología educativa y la colaboración entre pares. Estos enfoques buscan involucrar a los estudiantes de manera activa en su propio aprendizaje, fomentando su motivación, curiosidad y capacidad de autogestión.

Sobre la base de estos aspectos presentados, a continuación, se presentan las diez tendencias importantes en la didáctica de la matemática en la educación superior que buscan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina:

1. **Aprendizaje activo**: esta tendencia promueve que los estudiantes sean participantes activos en su aprendizaje. En lugar de ser receptores pasivos de información, se les alienta a involucrarse en actividades prácticas, resolución de problemas y discusiones en clase. El aprendizaje activo fomenta el pensamiento crítico, la creatividad y el razonamiento matemático.
2. **Uso de la tecnología**: la tecnología desempeña un papel crucial en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. El uso de software interactivo, aplicaciones móviles, simulaciones y herramientas en línea permite a los estudiantes explorar conceptos matemáticos, visualizar problemas y acceder a recursos adicionales. La tecnología también facilita la comunicación y colaboración entre estudiantes y profesores.

3. **Aprendizaje basado en proyectos**: el aprendizaje basado en proyectos involucra a los estudiantes en la resolución de desafíos y problemas matemáticos del mundo real. En lugar de centrarse únicamente en la teoría, se les presenta situaciones auténticas que requieren la aplicación de conceptos y habilidades matemáticas. Esto fomenta la transferencia de conocimiento y desarrolla la capacidad de solucionar problemas en contextos reales.
4. **Evaluación formativa**: la evaluación formativa se enfoca en proporcionar retroalimentación continua y específica durante el proceso de aprendizaje. En lugar de centrarse solo en las calificaciones finales, se brinda a los estudiantes comentarios oportunos sobre su desempeño y se les ofrece oportunidades para mejorar. La evaluación formativa ayuda a los estudiantes a identificar y corregir errores, fortaleciendo su comprensión y dominio de los conceptos matemáticos.
5. **Personalización del aprendizaje**: cada estudiante tiene fortalezas, debilidades y ritmos de aprendizaje diferentes. La personalización del aprendizaje implica adaptar la enseñanza y los recursos a las necesidades individuales de los estudiantes. Las tecnologías educativas, como los sistemas adaptativos, pueden proporcionar a los estudiantes actividades y materiales específicos para su nivel y estilo de aprendizaje, lo que promueve un aprendizaje más efectivo y significativo.
6. **Aprendizaje colaborativo**: el aprendizaje colaborativo fomenta el trabajo en equipo y la interacción entre los estudiantes. Al trabajar juntos para resolver problemas matemáticos, discutir ideas y explicar conceptos, los estudiantes pueden construir su conocimiento de manera más profunda. La colaboración también desarrolla habilidades sociales y de comunicación, que son valiosas tanto en el ámbito académico como en el profesional.
7. **Enfoque en la resolución de problemas**: la resolución de problemas es una habilidad esencial en matemáticas. Esta tendencia se centra en enseñar a los estudiantes cómo abordar y resolver problemas matemáticos de manera efectiva. Se les enseña a analizar el problema, identificar la información relevante, aplicar estrategias de resolución y justificar sus respuestas. La resolución de problemas

fomenta el pensamiento crítico y la aplicación práctica de los conceptos matemáticos.

8. **Uso de la modelización matemática**: la modelización matemática implica representar situaciones del mundo real mediante ecuaciones, gráficas u otros modelos matemáticos. Esta tendencia busca enseñar a los estudiantes cómo utilizar las matemáticas para entender y describir fenómenos del mundo real. La modelización matemática desarrolla la capacidad de aplicar los conceptos y herramientas matemáticas en contextos prácticos y fortalece la conexión entre las matemáticas y otras disciplinas.
9. **Enseñanza basada en la indagación**: la enseñanza basada en la indagación promueve que los estudiantes descubran y construyan su conocimiento matemático a través de la exploración y la investigación. En lugar de simplemente recibir información, se les plantean preguntas y se les desafía a explorar, analizar y encontrar soluciones por sí mismos. Esto fomenta la curiosidad, la autonomía y el pensamiento crítico en el aprendizaje de la matemática.
10. **Desarrollo de competencias transversales**: además de adquirir conocimientos matemáticos, se reconoce la importancia de desarrollar habilidades y competencias transversales en los estudiantes. Estas competencias incluyen el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la comunicación efectiva, el trabajo en equipo y el pensamiento analítico. La didáctica de la matemática en la educación superior busca integrar estas competencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje, preparando a los estudiantes para enfrentar los desafíos académicos y profesionales en un entorno global y cambiante.

Estas tendencias en la didáctica de la matemática en la educación superior tienen como objetivo mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, fomentando un aprendizaje activo, significativo y contextualizado. Al centrarse en la resolución de problemas, el uso de la tecnología, la colaboración, la personalización del aprendizaje y el desarrollo de competencias transversales, se busca preparar a los estudiantes para enfrentar los desafíos matemáticos del mundo real y promover un mayor interés y comprensión en esta disciplina.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Capítulo I

Respuestas:

1. Función Lineal:

a) La ecuación de la recta es $f(x) = -2x + 1$.

b) La función $f(x) = -3x + 4$ es una función lineal decreciente.

c) El valor de x para el cual $f(x) = 2x - 3$ es igual a cero es $x = 1.5$.

2. Función Cuadrática:

a) El vértice de la parábola es (-1, -4).

b) La función $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ tiene un máximo.

c) Los ceros de la función $h(x) = 2x^2 - 5x + 3$ son $x = 1$ y $x = 1.5$.

3. Función Modular:

a) El valor de x para el cual $f(x) = |x - 2|$ es igual a 3 es $x = 5$ y $x = -1$.

b) La función $g(x) = |2x + 1|$ es una función modular impar.

c) La gráfica de la función $h(x) = |x + 1| - 2$ es una "V" invertida desplazada una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo.

4. Función Exponencial:

a) El valor de x en la ecuación $2^{(x - 3)} = 4$ es $x = 5$.

b) La función $f(x) = 3^{(x + 2)}$ es una función exponencial creciente.

c) f(2) para la función $g(x) = 5^x$ es igual a 25.

5. Función Potencial:

a) El valor de x en la ecuación $2^x = 16$ es $x = 4$.

b) La función $f(x) = x^3$ es una función potencial inyectiva.

c) f(4) para la función $g(x) = 3^{(x-1)}$ es igual a 9.

Capítulo II

Respuestas

1. La función f(x) es una función cuadrática y, por lo tanto, es continua en todos los números reales, pues cada punto real pertenece al dominio de la función, existe el límite de la función en cada punto real y el valor del límite es igual a la función evaluada en dicho valor. Por lo tanto, la función f(x) es continua en todo su dominio, que es el conjunto de todos los números reales.

2. Aplicando el *límite fundamental algebraico* se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = [\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{3}}]^3 = e^3$$

3. Aplicando el *límite fundamental algebraico* se obtiene:

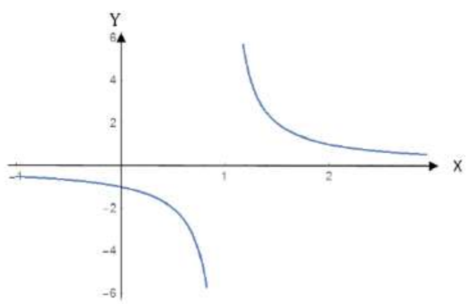
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x * \left(1+\frac{1}{x}\right)^5\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \times \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5 = e * 1 = e$$

4. Aplicando el *límite fundamental trigonométrico* se obtiene:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen}2v}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{2\text{sen}2v}{2v} = \lim_{v\to 0} 2 * \lim_{v\to 0}\frac{\text{sen}2v}{2v} = 2 * 1 = 2$$

5.



Sea $a \neq 1$ entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{a-1}$

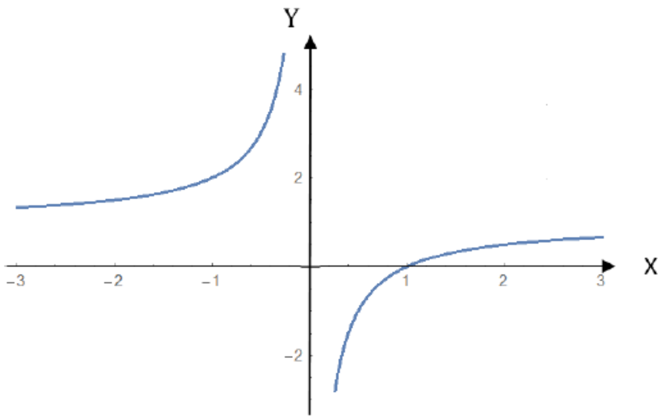
Luego, $f(x)$ es continua en $a \neq 1 \Rightarrow \forall x \neq 1 \quad f(x)$ es continua.

Sea $x = 1$ entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = \infty$

Luego, $f(x)$ no tiene límite en $x = 1$ y por lo tanto no es continua en este punto.

Se concluye que $f(x)$ es continua $\forall x \neq 1$ y discontinua en $x = 1$

6.



Sea $a \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{x-1}{x} = \frac{a-1}{a}$

Luego, $f(x)$ es continua en $a \neq 0 \Rightarrow \forall x \neq 0$ $f(x)$ es continua.

Sea $x = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$

Luego, $f(x)$ no tiene límite en $x = 0$ y por lo tanto no es continua en este punto.

Se concluye que $f(x)$ es continua $\forall x \neq 0$ y discontinua en $x = 0$

Capítulo III

Respuestas

1.

a) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \left(2/\sqrt{x}\right) - 3/(2x\sqrt{x})$

b) $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$

c) $y' = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$

d) $y' = \frac{5}{(2x+1)^2}$

e) $y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$

f) $y' = (x^4 + 4x^3)e^x$

g) $y' = \frac{2x^2+2x}{(1+2x)^2}$

h) $g'(t) = -12t(t^4 + 1)$

i) $F'(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}}$

j) $y' = \frac{2}{r^2+1}$

2.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = 1$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0$

d) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

e) $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

g) $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \infty$

3. Valor máximo absoluto: f(4) = 17

Valor mínimo absoluto: f(2) = − 3

4. Sean x y y la profundidad y el ancho del campo (en pies). Entonces el área expresada en términos de x y y es: A = xy

Para poder expresar A en función de una sola variable se usa la información dada en que la longitud de la cerca es de 2400 pies. Por eso:

$2x + y = 2400$

A partir de la ecuación $y = 2400 – 2x$ se obtiene que

$A = x\,(2400-2x) = 2400\,x – 2x^2$

De modo que la función que se quiere maximizar es:

$A\,(x) = 2400\,x – 2x^2 \quad 0 \leq x \leq 1200$

$A'(x) = 2400 – 4x = 0 \Rightarrow x = 600$

$A''(x) = – 4 < 0 \Rightarrow x = 600$ es un máximo absoluto.

Respuesta: el campo rectangular debe tener 600 pies de profundidad y 1200 pies de ancho.

Capítulo IV

Respuestas

1. Para calcular esta integral podemos hacer el cambio de variables

$u = mx$

Entonces,

$du = mdx$ y se tiene que

$$\int \mathrm{sen}(mx)\,dx = \int \frac{1}{m}\mathrm{sen}\,u\,du = \frac{1}{m}(-\cos u) + C = \frac{-\cos mx}{m} + C$$

b) Para calcular esta integral podemos hacer el cambio de variables $u = x + a$, de donde

$du = dx$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x + a| + C$$

c) Observamos que con el cambio de variables $u = x^2 + a^2$,

$du = 2xdx$

la integral se convierte en

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\, l\ln u\, l + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

puede calcularse con el cambio de variable $u = \varphi(x)$ mediante la función logarítmica; en efecto, para este cambio de variable se tiene $du = \varphi'(x)dx$, luego

$$\int \frac{\varphi\prime(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln lul + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

2.

a) $\int x^2 * \ln(x)\,dx = -\frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}x^3\ln x + c$

b) $\int x^2 \cos(x)\,dx = 2x\cos(x) + (-2 + x^2)\,\mathrm{sen}(x)$

c) $\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \mathrm{sen}(x)) + c$

d) $\int (\ln x)^2\,dx = 2x - 2x\ln x + x(\ln x)^2 + c$

3.

b) $\int_5^6 (y^3 - y^2 + 1)dy$ = 1661/12

c) $\int_0^{\Pi} 3senZdz =$ 6

d) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{23}{12} + 32^{2/3} = 6.679$

e) $\int_1^e \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx = \sqrt{e}$

f) $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + x^2\right)dx = \frac{e^3+2}{3}$

4.

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

5.

$$\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

6.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Big]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

Adiguzel, T., Kaya, M. H., & Cansu, F. K. (2023). Revolutionizing education with AI: Exploring the transformative potential of ChatGPT. *Contemporary Educational Technology*, 15(3), ep429. https://doi.org/10.30935/cedtech/13152

Aguilar, A. et al. (2010). *Cálculo Diferencial e Integral*. Pearson Educación, México, D.F.

Alonso, I., Gorina, A. y Salgado, A. (2021). Sistematización de experiencias sobre la investigación en didáctica de la resolución de problemas matemáticos. *MENDIVE*, 19(1), enero-marzo, 285-303. http://mendive.upr.edu.cu/index.php/MendiveUPR/article/view/2129

Alqahtani, T., Badreldin, H. A., Alrashed, M., Alshaya, A. I., Alghamdi, S. S., bin Saleh, K.,... & Albekairy, A. M. (2023). The emergent role of artificial intelligence, natural learning processing, and large language models in higher education and research. *Research in Social and Administrative Pharmacy*. https://doi.org/10.1016/j.sapharm.2023.05.016

Ayres, F., Mendelson, E., & Abellanas, L. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw-Hill. http://personal.cimat.mx:8181/~gil/docencia/2012/calculo/calculo_ayres1-5.pdf

Barragán, S., & González, L. (2022). Modelo para la valoración de un libro de texto universitario de matemáticas. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 48(1), 125-148. https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07052022000100125&script=sci_arttext

Bedoya, D. R. (2022). Recursos digitales y tecnológicos en la educación 4.0 técnica y tecnológica. *Aula Virtual*, 3(8), 235-246. https://aulavirtual.web.ve/revista/ojs/index.php/aulavirtual/article/download/193/422

Bicalho, D. C., & Reis, F. D. S. (2021). O contexto digital e os estilos de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral. https://repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/14572/1/ARTIGO_ContextoDigitalEstilos.pdf

Búcari, N. D., Langoni, L., & Vallejo, D. (2013). *Cálculo diferencial*. Libros de Cátedra.

Caballero, E. E., Sastoque, E. H., & Troncoso, J. B. (2020). *Cálculo integral aplicado a las ciencias empresariales y económicas*. Editorial Unimagdalena.

Carlos, I. (2020). *Cálculo Diferencial e Integral: das Dificuldades de Aprendizagem às Metodologias de Ensino*. Planeta Azul Editora.

Cooper, G. (2023). Examining science education in ChatGPT: An exploratory study of generative artificial intelligence. *Journal of Science Education and Technology*, 32(3), 444-452. https://doi.org/10.1007/s10956-023-10039-y

Crompton, H. & Burke, D. (2023). Artificial intelligence in higher education: the state of the field. *Int J Educ Technol High Educ*, 20(22). https://doi.org/10.1186/s41239-023-00392-8

de Ávila Rodrigues, L. M. D., & Tomás, C. Problemas de otimização: da Matemática Básica ao Cálculo Diferencial e Integral. https://caiotomas.github.io/files/Minicurso_XBienal.pdf

Domecq, N. I., Berenguer, I. A., & Sánchez, A. G. (2019). La interdisciplinariedad en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. Un instrumento didáctico para su concreción. *Magazine de las Ciencias: Revista de Investigación e Innovación*, 4(1), 115-130. https://revistas.utb.edu.ec/index.php/magazine/article/download/640/486

Domecq, N. I., Berenguer, I. A., & Sánchez, A. G. (2020). Comprobando la efectividad de constructos aplicados a la dinámica interdisciplinar de la Ingeniería Civil. *REFCalE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa*, 8(3), 47-62. http://refcale.uleam.edu.ec/index.php/refcale/article/download/3266/2050

Feliciano Morales, A., & Cuevas Valencia, R. E. (2021). Uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(23). https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-74672021000200120

Figueroa, A. R. (2014). *Cálculo diferencial: fundamentos, aplicaciones y notas históricas*. Grupo Editorial Patria.

Gibert, R. del P., & Gorina, A. (2023). Ecosistemas Digitales de Aprendizaje: una Alternativa para el Aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. *Universidad Y Sociedad*, 15(4), 30-44. https://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus/article/view/3950

Gibert, R. P., Naranjo, G. E., & Gorina, A. (2023). Comprensión textual en la resolución de problemas matemáticos. *Acta Universitaria*, 33, 1–16. https://doi.org/10.15174/au.2023.3809

Gómez, J. J. L., & Guío, J. P. C. (2020). *Las matemáticas en la vida real: introducción básica al modelamiento matemático*. Universidad Nacional de Colombia.

González, F. J. P. (2020). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Universidad de Sevilla. https://www.academia.edu/download/50730761/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2023). Artificial intelligence in education. In: *Data ethics: building trust: how digital technologies can serve humanity*. (pp. 621-653). Globethics Publications. https://doi.org/10.58863/20.500.12424/4276068

Iglesias, N., Alonso, I. & Gorina, A. (2017). El Cálculo Diferencial e Integral en las carreras de ciencias técnicas. Especificidades de su enseñanza. *Revista Maestro y Sociedad*. 14(Especial 3), 660-670.

Iglesias, N., Alonso, I. & Gorina, A. (2018). La dinámica interdisciplinar del proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en la carrera Ingeniería

Civil. *Revista Transformación*, mayo-agosto 2018, 14 (2), 214-225. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S2077-29552018000200007

Lo, C. K. (2023). What is the impact of ChatGPT on education? A rapid review of the literature. *Education Sciences*, 13(4), 410. https://www.mdpi.com/2227-7102/13/4/410

Navarrete, I. C., Herrera, E. J. E., Vidal, M. M., & Jiménez, C. A. U. (2008). *Cálculo diferencial e integral I* (Vol. 1). Reverté.

Ñevot, A., Poncela, J. M., & Soler, J. (1994). Apuntes y problemas de matemática superior. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/19/082-084.pdf

Patiño, A., Ramírez, M. S., & Buenestado, M. (2023). Active learning and education 4.0 for complex thinking training: analysis of two case studies in open education. *Smart Learning Environments*, 10(1), 8. https://doi.org/10.1186/s40561-023-00229-x

Pérez, C. D. P. (2006). *Cálculo diferencial para ingeniería*. Pearson Educación.

Poveda, E. A. B., & Tolosa, S. M. R. (2020). Apuntes de Cálculo: análisis y saberes: Área: Matemáticas II. *Libros interactivos multimedia (MI-Books)*, 1-116.

Ríos, A. C. (2012). *Cálculo diferencial*. Ediciones Díaz de Santos.

Sabín, Y., Toledo, V., Albelo, M., García, L., & Pino, J. A. (2005). Una herramienta de apoyo a la enseñanza del cálculo diferencial e integral a través de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC). *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 14(3), 59-62. https://www.redalyc.org/pdf/932/93214312.pdf

Sabogal, G., Monroy, N., & Pinzón, J. L. L. (2013). Cálculo diferencial: aprendiendo con nuevas tecnologías. *Revista de Tecnología (Archivo)*, 12(2), 42-51. https://revistacolombianadeenfermeria.unbosque.edu.co/index.php/RevTec/article/download/765/356

Seiffert, H. (1978). *Introducción a la matemática*. EUNED.

Socarrás, Y., Alonso, I. y Gorina, A. (2022). Sistematización de la resolución de problemas matemáticos centrada en la regulación de recursos afectivos y cognitivos. *Maestro y Sociedad*, 19(1), 469-483. https://maestroysociedad.uo.edu.cu/index.php/MyS/article/view/5514

Steward, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., México, D.F.

Udvaros, J., & Forman, N. (2023). Artificial Intelligence and Education 4.0. In *INTED2023 Proceedings* (pp. 6309-6317). IATED. https://doi.org/10.21125/inted.2023.1670

Vázquez, M. L., Alcivar, I. A. M., & Aguilar, G. F. C. (2022). La Educación Superior 4.0: retos y perspectivas. *Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas, 15(4), 71-89. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8590696.pdf*

Vera, F. (2023). Integración de la Inteligencia Artificial en la Educación Superior: Desafíos y oportunidades. *Transformar*, 4(1), 17-34. https://www.revistatransformar.cl/index.php/transformar/article/download/84/44

Vilca, P. E. A. (2021). El aprendizaje colaborativo virtual para la enseñanza de la matemática. *Dominio de las Ciencias*, 7(1), 253-267. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8385920.pdf

Zúñiga, A. R. (1997). *Elementos de cálculo diferencial: historia y ejercicios resueltos*. Editorial Universidad de Costa Rica.

ANEXO

Función seno: sen(x)

Dominio: El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales, es decir, $(-\infty, \infty)$.

Imagen: La imagen de la función seno está en el rango $[-1, 1]$, es decir, la función puede tomar cualquier valor entre -1 y 1.

Ceros: La función seno tiene infinitos ceros. Algunos ceros conocidos son π, 2π, 3π, etc.

Observación: La función seno es una función periódica con un período de 2π. Esto significa que su gráfico se repite cada 2π unidades en el eje x.

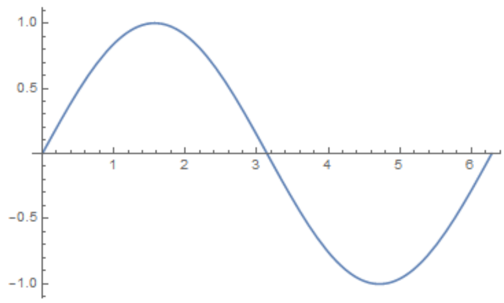
Inyectividad: La función seno no es inyectiva, ya que hay múltiples valores de x que pueden dar el mismo valor de sen(x). Por ejemplo, $\text{sen}(0) = \text{sen}(2\pi) = 0$.

Sobreyectividad: La función seno es sobreyectiva, ya que para cada valor y en el rango $[-1, 1]$, hay al menos un valor x en el dominio tal que $\text{sen}(x) = y$.

Biyectividad: La función seno no es biyectiva debido a su falta de inyectividad.

Intervalos de monotonía: La función seno es creciente en el intervalo $[0, \pi]$ y decreciente en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. Luego se repite cada 2π unidades.

Gráfico: (intervalo principal)



Función coseno: cos(x)

Dominio: El dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales, es decir, $(-\infty, \infty)$.

Imagen: La imagen de la función coseno está en el rango [-1, 1], es decir, la función puede tomar cualquier valor entre -1 y 1.

Ceros: La función coseno también tiene infinitos ceros. Algunos ceros conocidos son 0, π, 2π, etc.

Observación: La función coseno también es una función periódica con un período de 2π. Su gráfico se repite cada 2π unidades en el eje x, al igual que la función seno.

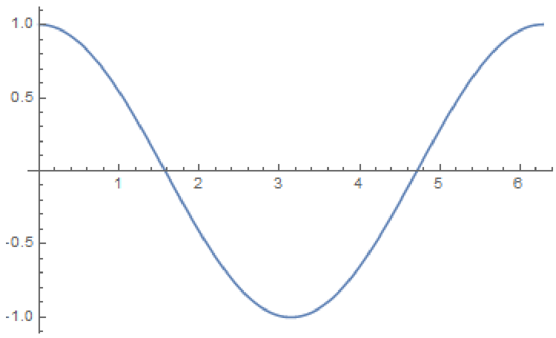
Inyectividad: Al igual que la función seno, la función coseno no es inyectiva, ya que hay múltiples valores de x que pueden dar el mismo valor de cos(x).

Sobreyectividad: La función coseno es sobreyectiva, ya que para cada valor y en el rango [-1, 1], hay al menos un valor x en el dominio tal que cos(x) = y.

Biyectividad: La función coseno no es biyectiva debido a su falta de inyectividad.

Intervalos de monotonía: La función coseno es decreciente en el intervalo [0, π] y creciente en el intervalo [π, 2π]. Luego se repite cada 2π unidades.

Gráfico: (intervalo principal)



Identidades trigonométricas fundamentales

Las identidades trigonométricas fundamentales son un conjunto de relaciones matemáticas que conectan las diferentes funciones trigonométricas entre sí. Estas identidades son ampliamente utilizadas en el cálculo y la resolución de problemas trigonométricos.

A continuación, se presentan las identidades trigonométricas fundamentales:

Identidades recíprocas:

- $csc(x) = 1/sen(x)$
- $sec(x) = 1/cos(x)$
- $cot(x) = 1/tan(x)$

Identidades pitagóricas:

- $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$
- $1 + tan^2(x) = sec^2(x)$
- $1 + cot^2(x) = csc^2(x)$

Identidades de ángulo medio:

- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) – sen^2(x) = 2cos^2(x) – 1 = 1 – 2sen^2(x)$
- $tan(2x) = 2tan(x)/(1 – tan^2(x))$

Identidades de suma y resta:

- $sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm cos(x)sen(y)$
- $cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sen(x)sen(y)$
- $tan(x \pm y) = (tan(x) \pm tan(y))/(1 \mp tan(x)tan(y))$

Identidades de ángulo doble:

- $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
- $cos(2x) = cos^2(x) – sen^2(x)$
- $tan(2x) = (2tan(x))/(1 – tan^2(x))$

Identidades de ángulo mitad:

- $sen(x/2) = \pm\sqrt{[(1 – cos(x))/2]}$
- $cos(x/2) = \pm\sqrt{[(1 + cos(x))/2]}$
- $tan(x/2) = \pm\sqrt{[(1 – cos(x))/(1 + cos(x))]}$

ISBN: 978-9942-45-274-0
9 789942 452740

CÁMARA ECUATORIANA DEL LIBRO

INTERNET ARCHIVE

OPEN LIBRARY

Crossref